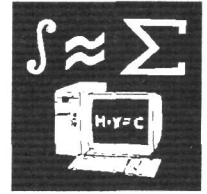


Математика и информатика



УДК 539.3

М.А. ЖУРАВКОВ, С.С. ЩЕРБАКОВ

ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ И НАПРЯЖЕНИЯ В ТРИЖДЫ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕННОМ ДУГООБРАЗНОМ СТЕРЖНЕ

Calculation of internal forces and stresses in the ring of a roller/ring active system used for wear-fatigue tests is considered. The ring is modelled by the arc of planar curved bar which is loaded by normal and tangential unit forces at arbitrary point. Both ends of the bar are rigidly fixed is considered of the bar. Analytical solution for internal forces and stresses in the bar is given. Flexibility method was used in order to disclose static indeterminacy of considered elastic model. Determination of all the reactions at supports allows calculation of bending moment, normal and lateral forces in the bar. Bending stresses in the curved bar are calculated basing on the obtained internal forces.

Исследование системы колесо/рельс имеет большое практическое значение, в частности, это касается железнодорожного транспорта. Такая система в условиях износоусталостных испытаний, проводящихся на машинах серии СИ, моделируется системой ролик/кольцо (рис. 1) [1].

В экспериментальных исследованиях для данной системы применяются двухопорная и четырехопорная схемы кольца (рис. 2), в связи с чем возникает задача оценки их напряженного состояния вследствие изгиба.

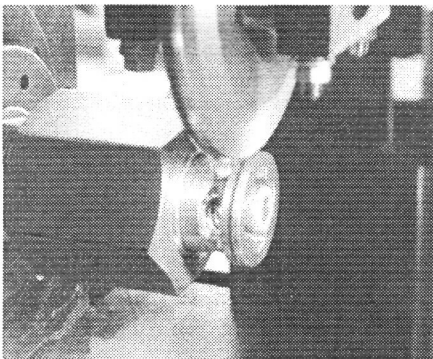


Рис. 1. Общий вид модели для износоусталостных испытаний

Для указанных на рис. 2 схем рассмотрим общую расчетную модель в виде дуги плоского кривого стержня с радиусом R , соответствующей углу $\pi - 2\beta$ (рис. 3). Концы стержня закреплены в точках A и B , а радиальная F_b и касательная fF_b (f – коэффициент трения) нагрузки приложены в некоторой точке стержня, определяемой углом φ . Нетрудно видеть, что такая расчетная модель является трижды статически неопределимой системой: шесть реакций опор $X_A, X_B, Y_A, Y_B, M_A, M_B$ показаны на рис. 3.

Хотя в литературе имеется множество решений для кольцевых систем (см. [2, 3] и др.), однако аналитического решения для трижды статически неопределимой системы при любых φ и β нам найти не удалось.

Наиболее широко применимым методом раскрытия статической неопределенности упругой модели является метод сил [2, 3]: заданная статически неопределенная модель освобождается от дополнительных внешних связей, а их действие заменяется активными силами. Величина активных сил в дальнейшем подбирается так, чтобы перемещения соответствовали тем ограничениям, которые накладываются на модель исключенными связями.

Построим основную модель для исследуемого случая, для чего заменим реакции X_B, M_B, M_A на активные нагрузки X_1, X_2, X_3 , соответствующим образом изменив закрепление стержня в точках A и B (рис. 4).

Условия геометрической неизменяемости модели формулируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{1F} = 0, \\ \delta_2 &= \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{2F} = 0, \\ \delta_3 &= \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{3F} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где δ_1 – перемещение точки B в направлении силы X_1 , т. е. горизонтальное перемещение шарнира, δ_2 и δ_3 – изменения углов поворота стержня по отношению к горизонтальной линии в точках B и A соответственно, δ_{iF} ($i = 1, 2, 3$) – перемещение в направлении силы X_i под действием внешних нагрузок F_b и fF_b , δ_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) – взаимное смещение точек модели в направлении силы X_i под действием единичной нагрузки, приложенной в направлении X_k .

Значения δ_{ij} и δ_{iF} получим, воспользуясь формулой Мора для упругих деформаций:

$$\delta_{ij} = \int_0^\pi \frac{M_i M_j}{EI} R d\psi, \quad (2)$$

$$\delta_{iF} = \int_0^\pi \frac{M_i M_F}{EI} R d\psi, \quad (3)$$

где $M_i(\psi)$ – изгибающий момент в каждой точке стержня при расчете, учитывающем действие на модель лишь одной активной нагрузки – единичной силы, приложенной в направлении силы X_i , $M_F(\psi)$ – изгибающий момент в каждой точке стержня, находящейся под действием активных сил F_b и fF_b , ψ – координата точки в полярной системе координат, начало отсчета которой находится в точке O , нулевой угол соответствует горизонтальному направлению радиус-вектора OB .

Для вычисления интегралов Мора необходимо определить значения изгибающих моментов M_i и M_F .

Решая уравнения равновесия для системы, одновременно нагруженной лишь одной единичной активной силой X_k (при всех остальных активных силах $X_i = F_b = fF_b = 0$, $i \neq k$), получим выражения для M_i :

$$\begin{aligned} M_1 &= X_1 R (\sin\psi - \sin\beta) = R (\sin\psi - \sin\beta), \\ M_2 &= Y_B R (\cos\beta - \cos\psi) + X_2 = \frac{1}{2} (\cos\psi - \cos\beta) + 1, \\ M_3 &= Y_B R (\cos\beta - \cos\psi) = \frac{1}{2} (\cos\psi - \cos\beta). \end{aligned} \quad (4)$$

Из уравнений равновесия для основной модели при действии усилий F_b, fF_b и $X_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) для изгибающего момента M_F имеет место выражение:

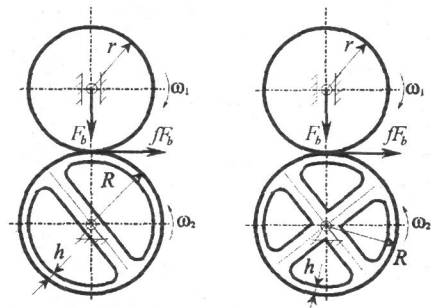


Рис. 2. Системы ролик/кольцо (ω_1, ω_2 – угловые скорости)

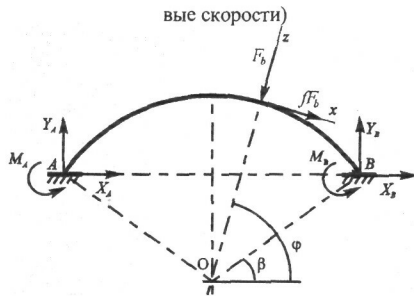


Рис. 3. Общая схема исследуемой модели

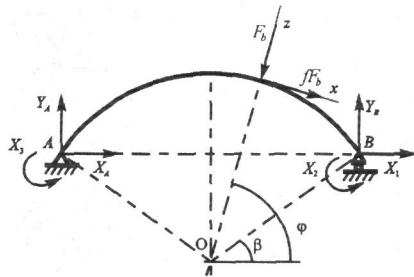


Рис. 4. Основная модель

$$M_F = \begin{cases} Y_B R (\cos \beta - \cos \psi) & \text{при } 0 \leq \psi \leq \varphi, \\ Y_B R (\cos \beta - \cos \psi) - F_b R \sin(\psi - \varphi) + f F_b R (1 - \cos(\psi - \varphi)) & \text{при } \varphi < \psi \leq \pi, \end{cases} \quad (5)$$

где $Y_B = \frac{F_b}{2} \left(\frac{f}{\cos \beta} + \sin \varphi (1 - f \tan \beta) + \cos \varphi (f + P \tan \beta) \right)$.

Подставляя выражения для моментов (4) в (2), после определенных преобразований получим значения перемещений δ_{ij} :

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{R}{2EI} (2\pi R^2 - 4R^2\beta - R^2(\pi - 2\beta)\cos(2\beta) - 3R^2\sin 2\beta), \\ \delta_{12} &= \frac{R}{4EI} (8R\cos\beta - 2R(1 + \cos 2\beta) - 4R(\pi - 2\beta)\sin\beta + R(\pi - 2\beta)\sin 2\beta), \\ \delta_{22} &= \frac{R}{8EI} (10\pi - 20\beta - 8(\pi - 2\beta)\cos\beta + (\pi - 2\beta)\cos 2\beta - \sin 2\beta), \\ \delta_{23} &= \frac{R}{8EI} (2\pi - 4\beta - 4(\pi - 2\beta)\cos\beta + (\pi - 2\beta)\cos 2\beta - \sin 2\beta), \\ \delta_{31} &= \frac{R}{4EI} (R(\pi - 2\beta)\sin 2\beta - 2R(1 + \cos 2\beta)), \\ \delta_{33} &= \frac{R}{8EI} (2\pi - 4\beta + (\pi - 2\beta)\cos 2\beta - \sin 2\beta). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя выражения для момента (5) в (3), получим значения перемещений δ_{iF} :

$$\begin{aligned} \delta_{1F} &= \frac{R^3 F_b}{4EI} [(3f + \pi - 2\beta)\cos(2\beta + \varphi) + ((4\beta + 2\varphi - 3\pi) - 3f)\cos\varphi + \\ &+ 2(2 + \pi f - 2f\varphi)\sin\beta + (3\pi f - 4f\beta - 2f\varphi - 1)\sin\varphi + (2 - \pi f + 2\beta f)\sin(2\beta + \varphi)], \\ \delta_{2F} &= -\frac{R^2 F_b}{2EI} (2 + \pi f - 2f\varphi) + \frac{R^2 F_b}{16EI \cos\beta} \times \\ &\times [4(1 + \beta f - \varphi f) + (2 + \pi f - 2\varphi f)(2\cos 2\beta + \cos(\beta - \varphi)) - (2 - \pi f + 2\beta f) \times \\ &\times (4\cos\varphi + 4\cos(2\beta + \varphi) + \cos(3\beta + \varphi)) - 2f\sin 2\beta - (\pi - 2\varphi)\sin(\beta - \varphi) - \\ &- 2(f + \pi - 3\beta + 2\varphi)\sin(\beta + \varphi) + (2f + \pi - 2\beta)(4\sin\varphi + 4\sin(2\beta + \varphi) - \sin(3\beta + \varphi))], \\ \delta_{3F} &= \frac{R^2 F_b}{16EI \cos\beta} [4(1 + \beta f - \varphi f) + (2 + \pi f - 2\varphi f)(2\cos 2\beta + \cos(\beta - \varphi)) + \\ &+ 2(2 - \pi f + 3f\beta - 2f\varphi)\cos(\beta + \varphi) + (2 - \pi f + 2\beta f)\cos(3\beta + \varphi) - 2f\sin 2\beta - \\ &- (\pi - 2\varphi)\sin(\beta - \varphi) - 2(f + \pi - 3\beta + 2\varphi)\sin(\beta + \varphi) - (2f + \pi - 2\beta)\sin(3\beta + \varphi)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставим (6) и (7) в систему (1). Решив (1) относительно неизвестных активных сил X_1, X_2 и X_3 , получим значения реакций опор X_B, M_B, M_A :

$$X_B = X_1, \quad M_B = X_2, \quad M_A = X_3.$$

Составим уравнения равновесия для исходной исследуемой модели и найдем другие три неизвестные реакции опор X_A, Y_A, Y_B :

$$Y_A = \frac{1}{2R \cos \beta} (R F_b (f \cos(\beta - \varphi) - f - \sin(\beta - \varphi)) + M_A + M_B),$$

$$Y_B = \frac{1}{2R \cos \beta} (R F_b (f \cos(\beta - \varphi) + f + \sin(\beta - \varphi)) - M_A - M_B),$$

$$X_A = F_b (\cos \varphi - f \sin \varphi) - X_B.$$

После определения всех реакций опор становится возможным расчет изгибающего момента M , продольного N и поперечного Q усилий в стержне:

$$M = \begin{cases} Y_B R(\cos \beta - \cos \psi) + X_B R(\sin \psi - \sin \beta) + M_B & \text{при } 0 < \psi < \varphi, \\ Y_B R(\cos \beta - \cos \psi) + X_B R(\sin \psi - \sin \beta) - F_b R \sin(\psi - \varphi) - f F_b R(1 - \cos(\psi - \varphi)) + M_B & \\ \text{при } \varphi < \psi < \pi, \end{cases}$$

$$N = \begin{cases} -Y_B \cos \psi + X_B \sin \psi & \text{при } 0 < \psi < \varphi, \\ -Y_B \cos \psi + X_B \sin \psi - F_b \sin(\psi - \varphi) + f F_b \cos(\psi - \varphi) & \text{при } \varphi < \psi < \pi, \end{cases} \quad (8)$$

$$Q = \begin{cases} Y_B \sin \psi + X_B \cos \psi & \text{при } 0 < \psi < \varphi, \\ Y_B \sin \psi + X_B \cos \psi - F_b \cos(\psi - \varphi) - f F_b \sin(\psi - \varphi) & \text{при } \varphi < \psi < \pi. \end{cases}$$

Эпюры внутренних усилий (10) представлены на рис. 5.

Для определения напряжений в кривом стержне при его изгибе воспользуемся следующими формулами [3]:

$$\sigma_{xx}^{(M)} = \frac{M(h/2 - z)}{eF[r_n - (h/2 - z)]},$$

$$\sigma_{xx}^{(N)} = \frac{N}{A}, \quad \sigma_{xz}^{(Q)} = \frac{QS_z(y)}{dJ_z}, \quad (9)$$

где h – толщина стержня, $e = R - r_n$, r_n – радиус нейтральной линии, R – радиус средней линии, A – площадь поперечного сечения стержня относительно его нейтральной линии, $d = d(y)$ – ширина сечения на уровне, где определяют $\sigma_{xz}^{(Q)}$, $S_z(y)$ – абсолютная величина статического момента относительно нейтральной линии той части площади $A(y)$, которая заключена между линией, где определяют $\sigma_{xz}^{(Q)}$, и краем сечения.

Характер распределения напряжений (9) в стержне иллюстрирует рис. 6.

Представленное решение может использоваться для анализа различных распределений по стержню нормальных и касательных нагрузок путем соответствующей суперпозиции внутренних усилий (8), а также для изучения динамического изменения напряженного состояния стержня в случае изменения угла φ во времени.

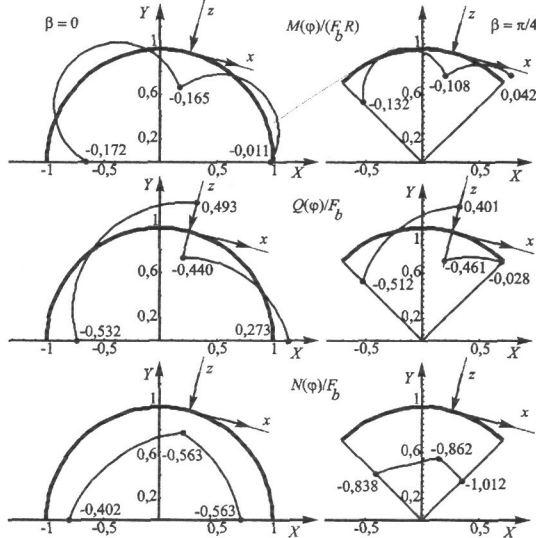


Рис. 5. Внутренние усилия в кривом стержне при $\varphi = 5\pi/12$, $R = 1$ и $f = 0,05$

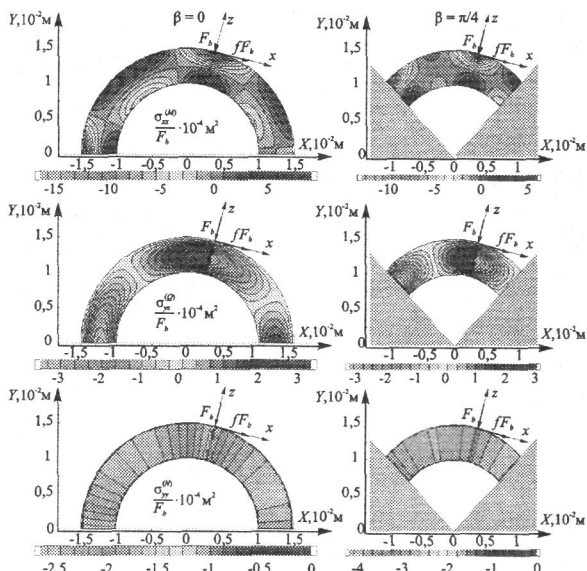


Рис. 6. Напряжения в стержне при $\varphi = 5\pi/12$, $R = 1,5$ см, $h = 0,5$ см и $f = 0,05$

1. Журавков М. А., Щербачков С. С. // Труды 5-го Международного симпозиума по трибофатике (ISTF 2005), Иркутск, 3–7 окт. 2005 г.: в 3 т. / Отв. ред. А.П. Хоменко. Иркутск, 2005. Т. 1. С. 375.

2. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении: в 3 т. М., 1958. Т. 1.

3. Писаренко Г. С. и др. Сопротивление материалов. Киев, 1986.

Поступила в редакцию 16.12.06.

Михаил Анатольевич Журавков – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики.

Сергей Сергеевич Щербачков – аспирант кафедры теоретической и прикладной механики. Научный руководитель – М.А. Журавков.

УДК 517.958:537.8(075.8)

Д.П. ТАВАККОЛИ (ИРАН), В.Т. ЕРОФЕЕНКО

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТОНКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

The system of integral equations describing the penetration of plane electromagnetic fields through thin cylindrical shell from composite material was obtained.

В научной литературе по проблемам электродинамики большое внимание уделяется решению задач дифракции электромагнитных волн различных типов на материальных структурах из композитных материалов [1]. Рассматриваемые модельные задачи дифракции, как правило, связаны с исследованием классов геометрически правильных тел [1–3], для которых используются аналитические решения уравнений Максвелла в композитных средах [4]. Значительную проблему составляют задачи дифракции на телах произвольной формы [5]. В данной работе получена система интегральных уравнений для решения задач рассеяния произвольной комбинации *TE*- и *TH*-поляризованных плоских полей на цилиндрической тонкой композитной оболочке произвольного поперечного сечения, основанная на специальных граничных условиях сопряжения на поверхности оболочки [6].

В пространстве R^3 с фиксированной декартовой системой координат $Oxuz$ рассмотрим тонкую замкнутую оболочку D переменной толщины Δ , ограничивающую область D_2 . Пусть D_1 – внешняя область оболочки, а $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$ – внешняя, внутренняя и срединная достаточно гладкие поверхности оболочки D . В области D_1 распространяется монохроматическое электромагнитное плоское первичное поле E_0, H_0 , возбужденное его источником, колеблющимся с круговой частотой ω . В результате взаимодействия первичного поля с оболочкой в области D_1 образуется поле $E_1 = E_0 + E'_1, H_1 = H_0 + H'_1$, где E'_1, H'_1 – отраженное поле в D_1 , а в область D_2 проникает поле E_2, H_2 . Поля E_j, H_j в областях D_j удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} E_j = i\omega\mu_j H_j, \quad \operatorname{rot} H_j = -i\omega\varepsilon_j E_j, \quad (1)$$

где ε_j, μ_j – комплексная диэлектрическая и магнитная проницаемости среды в D_j . Область D заполнена композитным материалом, в котором электромагнитное поле E, H удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot} E = i\omega(\mu H + ZE), \quad \operatorname{rot} H = -i\omega(\varepsilon E + GH), \quad (2)$$

где комплексные параметры ε, μ, Z, G характеризуют композит.

В качестве первичного поля выберем произвольную комбинацию базисных *TE*- и *TH*-поляризованных плоских полей [7]