

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ ДЕЙСТВИИ НА НЕГО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Analytic solution for determination of three-dimensional stress state caused by normal distributed contact load is proposed. Calculation of stress tensor components is realized by superposition of solutions for uniform load applied to triangular area. The results for elliptic distribution of contact load are in good accordance with particular exact solutions for some specific regions of half-space.

Решение задачи механики контактного взаимодействия состоит из двух основных этапов: определения распределения контактного давления и расчета для данного граничного условия полей напряжений и деформаций.

Обратимся к задаче расчета трехмерного напряженного состояния при действии на полупространство распределенных нормальных усилий:

$$\sigma_m|_S = p(F_N, S), \quad \sigma_{ij}|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad i, j = x, y, z, \quad (1)$$

где p – контактное давление, $S(x, y)$ – площадка контакта, F_N – контактная сила, ρ – расстояние от центра контакта, σ_{ij} – напряженное состояние при контактном взаимодействии, $\mathbf{n} \perp S$.

Исследование напряженного состояния в зоне контакта в точной постановке обычно ограничивается нахождением компонентов напряжений в точках оси z и в некоторых точках поверхности контакта [1–4 и др.]. Определение всех компонент тензора напряжений в любой точке полупространства в точной постановке затруднительно в силу значительной сложности интегрируемых функций.

Расчет напряжений $\sigma_{ij}^{(hs)}$ в любой точке $M(x, y, z)$ при $z \geq 0$ полупространства при действии на поверхность нормальных усилий $p(x, y)$ может быть проведен численно с использованием функций влияния $G_{ij}^{(B)}$ из фундаментального решения задачи Буссинеска $\sigma_{ij}^{(B)}$ о действии сосредоточенной нормальной силы на полупространство [5, 6]:

$$\sigma_{ij}^{(hs)}(x, y, z) = \iint_{S(\xi, \eta)} p(\xi, \eta) G_{ij}^{(B)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta. \quad (2)$$

Решение Буссинеска в соответствии с [1–3] имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(B)} &= \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{x^2 - y^2}{r^2} + \frac{zy^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zx^2}{\rho^5} \right\}, \\ \sigma_{yy}^{(B)} &= \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{y^2 - x^2}{r^2} + \frac{zx^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zy^2}{\rho^5} \right\}, \\ \sigma_{zz}^{(B)} &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{\rho^5}, \quad \sigma_{xy}^{(B)} = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{xy}{r^2} - \frac{xyz}{\rho^3} \right] - \frac{3xyz}{\rho^5} \right\}, \\ \sigma_{xz}^{(B)} &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{xz^2}{\rho^5}, \quad \sigma_{yz}^{(B)} = -\frac{3P}{2\pi} \frac{yz^2}{\rho^5}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Необходимо учесть, что на поверхности полупространства расчет напряжений $\sigma_{ij}^{(hs)}$ путем численного интегрирования в соответствии с (2) является весьма затруднительным. Это обусловлено тем, что для точек $z=0$ поверхности полупространства в силу особенности в точке приложения единичной нагрузки расчеты с помощью различных методов численного интегрирования сходятся довольно медленно, кроме того, результаты расчета плохо соответствуют известным решениям в некоторых подобластях поверхности полупространства.

Для расчета напряжений в любой точке $M(x, y, 0)$ областей поверхности полупространства при действии нормально распределенных усилий применяют ряд частных решений [1–3].

Рассмотрим аналитическое решение граничной задачи (1) для $M(x, y, z)$ при $z \geq 0$, основанное на решении для равномерно распределенного по треугольной области давления [2, 7]. Общая схема решения задачи представлена на рис. 1.

Для начала рассмотрим случай действия на прямоугольный треугольник распределенной однородной нагрузки интенсивности p (рис. 1 а).

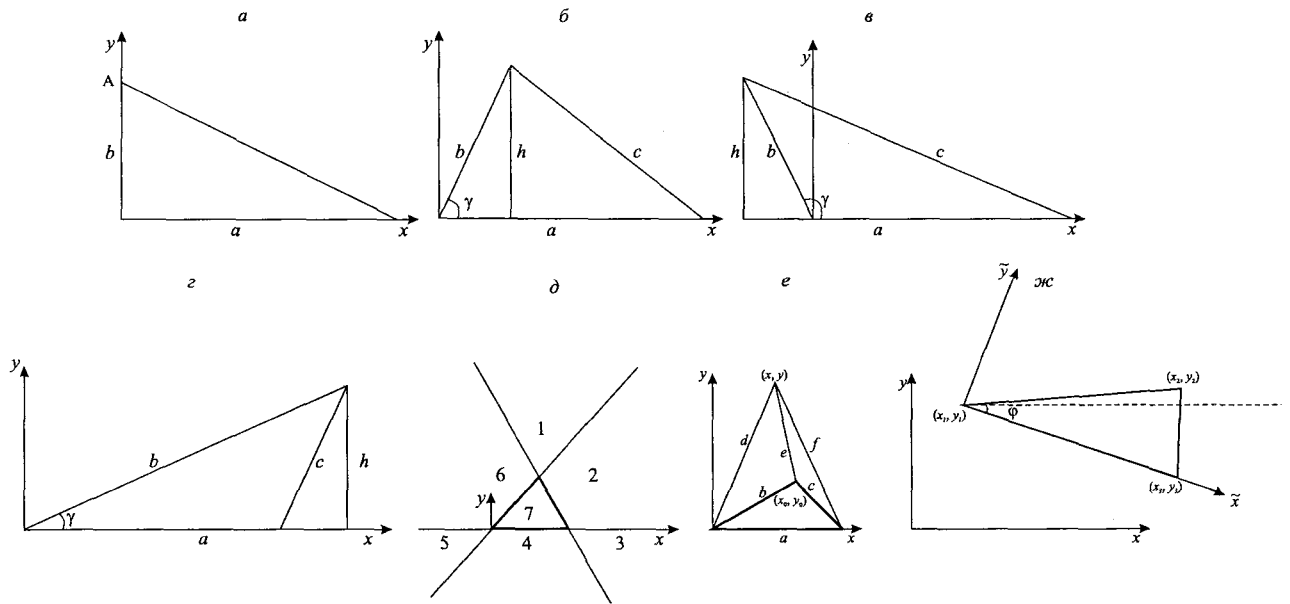


Рис. 1. Общая схема к решению задачи

Используя компоненты фундаментального решения Буссинеска (3), путем интегрирования определяем компоненты напряженно-деформированного состояния на вертикальной прямой, проходящей через точку А:

$$F_0(a, b, z) = \int_0^{b-a/bx} \int_0^b p f(-x, a-y, z) dy dx,$$

где F_0 – компонента напряженно-деформированного состояния в искомой точке, а $f(x, y, z)$ – соответствующая компонента решения Буссинеска. В итоге после проведения интегрирования получаем

$$u_x = p \operatorname{Re} \left(2(a-r)z(v-1) \ln z + 2rz(v-1) \ln(a+r_z) + a(r(2v-1) \ln(z+r_z) - 2z(v-1) \ln(r+R) + r(1-2v) \ln(z+R)) \right) (4\pi\mu r)^{-1},$$

$$u_y = \frac{p \operatorname{Re} \left(ar(2v-1) \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{bz}{aR} \right) \right) + 2z(v-1) \left(r \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{R} \right) + b(\ln z - \ln(r+R)) \right) \right)}{4\pi\mu r},$$

$$u_z = \frac{p}{4\pi\mu} \operatorname{Re} \left(z \operatorname{arctg} \left(\frac{bz}{r} \right) - z \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \right) + 2(v-1) \left(a \ln \frac{r_z}{(b+R)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + iz \left(2 \ln(-a+ib) - \ln \left(\frac{a^2 + b^2 - iaz - bR}{a-iz} \right) + \ln \left(-\frac{a^2 + iaz + b(b+R)}{a+iz} \right) \right) \right) \right),$$

$$\sigma_{xx} = p \operatorname{Re} \left(ab(-z+R(1+(1-2v)\ln 2)) - 4ir^2Rv \ln r + abR(1-2v) \ln z + R(-ab(1-2v) \ln(z+R) - \right. \\ \left. - ir^2v \left(\ln \left(-\frac{1}{(v(a+ib))^2} \right) - \ln \left(\frac{r^2 - iaz - bR}{v(a-iz)} \right) - \ln \left(-\frac{r^2 + iaz + bR}{v(a+iz)} \right) \right) \right) (2r^2R\pi)^{-1},$$

$$\sigma_{yy} = p \operatorname{Re} \left(-i \left(-2iab + r^2 \left(-i\pi + 2 \ln \left(-\frac{1}{a+ib} \right) + 2 \ln \left(\frac{2a^2}{bz} \right) + 2iab(-1+2v) \ln \left(\frac{4}{2v-1} \right) \right) \right) + \right. \\ \left. + 2ab \left(\frac{z(R^2 + a^2)}{Rr_z^2} + (1-2v) \ln a + \frac{ir^2 \ln \left(\frac{2a^2(a^2 - iaz + b(b-R))}{br^2(a-iz)z} \right)}{2ab} + \frac{ir^2 \ln \left(\frac{2a^2(a^2 + iaz + b(b+R))}{br^2(a+iz)z} \right)}{2ab} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} & + (1 - 2\nu) \ln \frac{2(z + R)}{az(-1 + 2\nu)} \Big) \Big) \Big) (4r^2\pi)^{-1}, \\ \sigma_{xy} = p \operatorname{Re} & \left(-\frac{r^2 z}{r_z} + \frac{a^2 z}{R} + b^2 \left(1 - \nu \ln 4 + \ln \left(\frac{2z}{z + r_z} \right) + 2\nu \ln \left(\frac{z + r_z}{z} \right) \right) - a^2 (1 - 2\nu) \ln \left(\frac{z + r_z}{z + R} \right) \right) (2r^2\pi)^{-1}, \\ \sigma_{xz} = & -\frac{pa(R - r_z)}{2r^2\pi}, \\ \sigma_{yz} = & \frac{pa^2 b}{2r_z^2 R\pi}, \\ \sigma_{zz} = & \frac{p \left(abz + r_z^2 R \left(\operatorname{arctg} \frac{aR}{bz} - \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right) \right)}{2r_z^2 R\pi}, \end{aligned}$$

где $R = \sqrt{a^2 + b^2 + z^2}$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $r_z = \sqrt{a^2 + z^2}$.

Дальнейшая схема исследования строится следующим образом.

1) Вычисление напряженно-деформированного состояния в вершине произвольного треугольника. Без ограничения общности можно считать, что одна из сторон треугольника совпадает с осью x , а требуемая вершина лежит в верхней полуплоскости. Пусть длина нижней стороны будет a . Тогда возможны три случая (рис. 1 б – з).

В итоге выражения для компонент напряженно-деформированного состояния в каждом из трех случаев даются следующим образом:

$$\begin{aligned} 1 \text{ б) } & F_1(a, b, c, z) = \tilde{F}_0(h, b \cos \gamma, z) + F_0(h, a - b \cos \gamma, z), \\ 1 \text{ в) } & F_1(a, b, c, z) = F_0(h, a + b \cos(\pi - \gamma), z) - F_0(h, b \cos(\pi - \gamma), z), \\ 1 \text{ з) } & F_1(a, b, c, z) = \tilde{F}_0(h, b \cos \gamma, z) - \tilde{F}_0(h, b \cos \gamma - a, z), \end{aligned}$$

где F_1 – компонента напряженно-деформированного состояния, а \tilde{F}_0 – компонента тензора (вектора) F_0 в системе координат (x, y) , полученная путем преобразования соответствующей компоненты по правилу преобразования вектора или тензора при замене координат: $\tilde{x} = -x, \tilde{y} = y$.

2) Вычисление напряженно-деформированного состояния в верхнем (относительно связанной с треугольником системе координат) углу произвольно расположенного треугольника. Компоненты НДС выражаются следующим образом:

$$F_2(a, b, c, x_0, y_0, x_1, y_1, z) = \tilde{F}_1(a, b, c, z),$$

где $\tilde{F}_1(a, b, c, z)$ – компонента тензора (вектора) F_1 в системе координат (x, y) , полученная путем преобразования соответствующей компоненты по правилу преобразования вектора или тензора при замене:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x \cos(\arg(x_1 - x_0 + i(y_1 - y_0))) + y \sin(\arg(x_1 - x_0 + i(y_1 - y_0))), \\ \tilde{y} &= -x \sin(\arg(x_1 - x_0 + i(y_1 - y_0))) + y \cos(\arg(x_1 - x_0 + i(y_1 - y_0))). \end{aligned} \quad (4)$$

3) Вычисление напряженно-деформированного состояния от однородной, распределенной по треугольнику нагрузки в произвольной точке полупространства. Данное решение легко получается из предыдущего путем суперпозиции, для чего все полупространство разбивается на области, как показано на рис. 1 д.

Далее для каждой из областей соответствующим образом достраиваются треугольники так, чтобы точка была углом каждого из них. Дальнейший процесс рассмотрим на примере первой области (рис. 1 е).

Тогда для каждой компоненты получаем

$$F_3(a, b, c, x, y, z) = F_2(a, d, f, 0, 0, a, 0, z) - F_2(b, d, e, x_0, y_0, a, 0, z) - F_2(c, e, f, x_0, y_0, a, 0, z),$$

где a, b, c – стороны треугольника,

$$f = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}, \quad d = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad e = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

где (x, y) – координаты расчетной точки, (x_0, y_0) – координаты верхнего угла треугольника.

4) Определение напряженно-деформированного состояния массива в полупространстве при произвольном расположении треугольника (рис. 1 ж). Пусть $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ – координаты вершин треугольника. Тогда для каждой компоненты НДС можем записать

$$F_4(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x, y, z) = \tilde{F}_3(a, b, c, \tilde{x}, \tilde{y}, z),$$

где

$$(a, b, c) = \begin{cases} (\text{dist}(x_1, y_1, x_3, y_3), \text{dist}(x_1, y_1, x_2, y_2), \text{dist}(x_2, y_2, x_3, y_3)), \begin{cases} x_3 - x_1, y_3 - y_1 \\ x_2 - x_1, y_2 - y_1 \end{cases} > 0, \\ (\text{dist}(x_1, y_1, x_2, y_2), \text{dist}(x_1, y_1, x_3, y_3), \text{dist}(x_2, y_2, x_3, y_3)), \begin{cases} x_3 - x_1, y_3 - y_1 \\ x_2 - x_1, y_2 - y_1 \end{cases} < 0. \end{cases}$$

Здесь $\text{dist}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, $\tilde{F}_3(a, b, c, \tilde{x}, \tilde{y}, z)$ – компонента тензора (вектора) F_3 в системе координат (x, y) , полученная путем преобразования соответствующей компоненты по правилу преобразования вектора или тензора (4) при замене (угол φ подсчитывается против часовой стрелки от оси x):

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= (x - x_1) \cos \varphi + (y - y_1) \sin \varphi, \\ \tilde{y} &= -(x - x_1) \sin \varphi + (y - y_1) \cos \varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, получено точное решение для однородной нагрузки, распределенной по любой треугольной области.

5) Определение напряженно-деформированного состояния полупространства от произвольной нагрузки, приложенной по произвольной области. Конечно, точное решение получить в данном случае, вообще говоря, нельзя, однако с помощью описанного метода можно найти приближенное решение. В данном случае область разбивается на треугольники. Сделать это можно, например, с помощью программы **triangle.exe** [8]. Затем на каждом треугольнике прикладывается однородная нагрузка величиной исходной нагрузки в центре данного треугольника (при разбиении области надо учитывать, что в местах с большими градиентами нагрузки требуется более мелкое разбиение) и результирующее НДС получается как сумма НДС по каждому из треугольников. Чем мельче разбиение, тем точнее решение.

В качестве примера работоспособности алгоритма рассмотрим воздействие на эллиптическую область нагрузки, распределенной по эллиптическому закону:

$$p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Точные решения для напряжений σ_{xx}, σ_{yy} на координатных осях Ox и Oy внутри области приложения нагрузки (при построении графиков для продолжения этих решений за область приложения

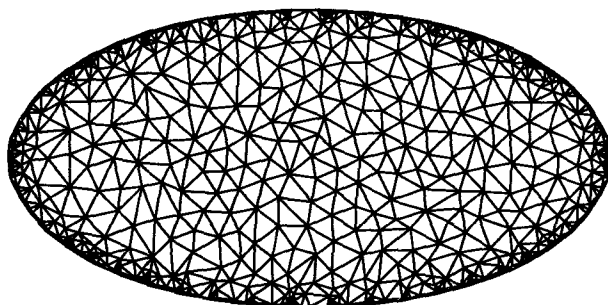


Рис. 2. Разбиение эллиптической области контакта на треугольники

нагрузки использовалось численное интегрирование), а также для напряжения σ_{zz} на оси Oz приведены в [2, 3]. Сравним эти решения с полученными описанным путем. При расчетах мы полагали соотношение полуосей эллипса b/a равным 0,5 и использовали следующее разбиение эллипса на треугольники, полученное с помощью программы **triangle.exe** (рис. 2).

Результаты вычислений приведены на рис. 3 (сплошные линии – полученное решение, пунктирные линии – известные точные решения для соответствующих подобластей полупространства).

Как видно, наблюдается практически полное совпадение. В таблице приведены средняя и максимальная погрешности по каждому графику, рассчитанные по следующей формуле:

$$\varepsilon = \left| \left(\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)} \right) \right| / p_0,$$

где $\sigma_{ij}^{(1)}$ – известные точные решения, $\sigma_{ij}^{(2)}$ – решение, полученное на основе описанного метода.

Отклонения полученных решений от точных

Погрешность	σ_x / p_0 на Ox	σ_y / p_0 на Oy	σ_z / p_0 на Ox	σ_x / p_0 на Oy	σ_z / p_0 на Oz
Средняя	0,0017951	0,00520747	0,00520747	0,00529966	0,000430281
Максимальная	0,0115191	0,0355548	0,0355548	0,0426498	0,000636026

Анализ рис. 3 и таблицы показывает хорошее соответствие полученного решения известным точным решениям. Следует отметить, что наибольшая погрешность не превышает 4,5 % (см. таблицу) и может быть уменьшена за счет увеличения плотности треугольников в расчетной области.

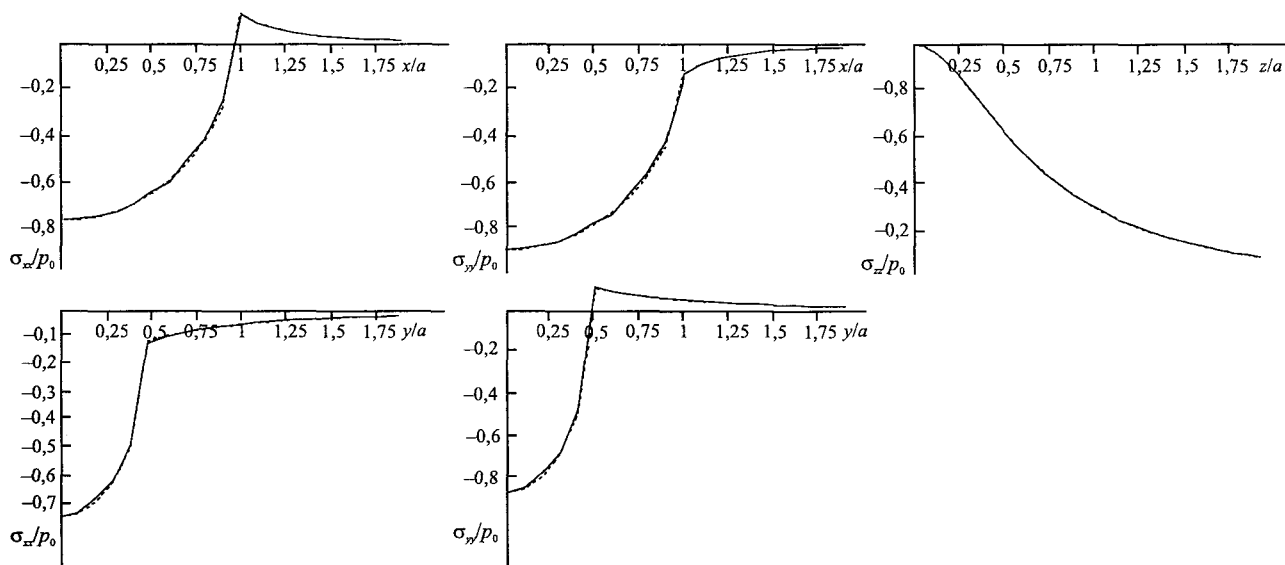


Рис. 3. Графики безразмерных напряжений на осях координат

Эффективность предложенного подхода по сравнению с применением численного интегрирования особенно хорошо отражается при получении компонент НДС в области приложения нагрузки, где численное интегрирование, как уже говорилось, производить достаточно сложно из-за наличия особенностей в подынтегральном выражении. Данный подход применим для определения напряженного состояния при любых распределениях нормальных контактных усилий, аппроксимируемых треугольными областями с равномерно распределенным давлением.

1. Журавков М. А. Фундаментальные решения теории упругости и некоторые их применения в геомеханике, механике грунтов и оснований. Мн., 2008.
2. Johnson K.L. Contact Mechanics. Cambridge, 1985.
3. Modern Tribology Handbook. Minsk, 2000.
4. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. М., 2001.
5. Журавков М. А., Щербаков С. С. // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2008. № 3. С. 60.
6. Сосновский Л. А. Механика износоустойчивого повреждения. Гомель, 2007.
7. Davis R.O., Selvadurai A.P.S. Elasticity and geomechanics. Cambridge, 1996.
8. Режим доступа: <http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle>. Дата доступа: 07.12.2009.

Поступила в редакцию 21.10.09.

Андрей Валентинович Круподеров – аспирант кафедры теоретической и прикладной механики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой М.А. Журавков.