

ФОРМИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНЫХ ВОЛНООБРАЗНЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ ПРИ КОНТАКТНО-МЕХАНИЧЕСКОЙ УСТАЛОСТИ

Л. А. Сосновский¹, С. С. Щербаков²

¹Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

²Белорусский государственный университет, г. Минск

Изложены результаты теоретического анализа особого типа предельного состояния – образования на дорожке качения остаточных волнообразных повреждений. Записаны общие дифференциальные уравнения движения ролика по валу; эта пара в известной мере имитирует работу системы колесо/рельс. Предложена методика учета возмущающего действия силовых факторов путем определения интегральных моментов от распределенных усилий, передаваемых на ролик в зоне контакта.

Силовые системы ролик/вал, подвергаемые испытаниям на контактно-механическую усталость (рисунок 1), в известной мере воспроизводят условия эксплуатации системы колесо/рельс [1]. При таких испытаниях в работах [2–4] был обнаружен особый тип предельного состояния: образование на дорожке качения остаточных волнообразных повреждений. Это явление не получило удовлетворительного объяснения, аналитическое его описание не было дано. Ниже изложены результаты систематического экспериментального и теоретического анализа указанного явления.

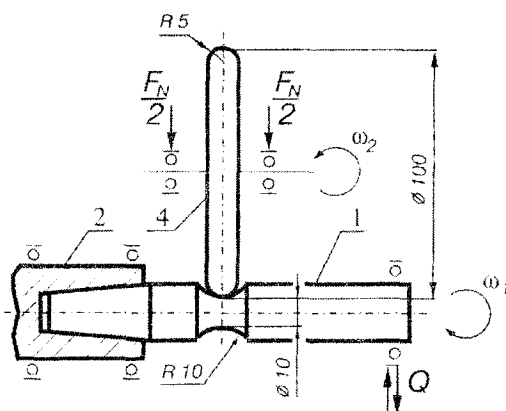


Рисунок 1 – Схема испытаний

Экспериментальные исследования. Испытаниям на контактно-механическую усталость¹⁾ подвергали силовую систему сталь 25ХГТ (ролик)/сталь 45 (вал) по схеме, представленной на рисунке 1. Свойства стали 25ХГТ были следующими: предел выносливости $\sigma_{-1} = 570$ МПа, предел контактной усталости $p_f = 3100$ МПа. Свойства стали 45: $\sigma_{-1} = 260$ МПа и $p_f = 1760$ МПа. Таким образом, характерная особенность данной силовой системы состояла в том, что прочность металла вала существенно меньше, чем ролика, поэтому в процессе испытаний обнаруживаются остаточные деформации и повреждения только в окрестности дорожки качения на валу, тогда как размеры ролика остаются практически неизменными.

В процессе испытаний изгибающей нагрузке $Q = 225$ Н = const соответствовала амплитуда напряжений $\sigma_a = 225$ МПа $< \sigma_{-1} = 260$ МПа. Контактная нагрузка изменялась ступенчато по программе, показанной на рисунке 2. Предел контактной выносливости $p_f = 1760$ МПа был превышен на III ступени нагружения.

Движение ролика по валу стало нестационарным при переходе с VII на VIII ступень контактного нагружения, т. е. после 700000 циклов испытаний (см. стрелку 1 на рисунке 2). Остаточные радиальные деформации вала в зоне нестационарности показаны на рисунке 3 светлыми точками (750154 циклов нагружения, т. е. посередине ступени VIII).

¹⁾ Проведены совместно с С.А. Тюриным.

На IX ступени произошла потеря устойчивости движения (см. стрелку 2 на рисунке 2). Остаточные радиальные деформации вала при потере устойчивости движения показаны на рисунке 3 крестиками (851688 циклов нагружения, т.е. посередине ступени IX). Испытания прекращены на X ступени при $N_2=976100$ циклов нагружения из-за недопустимых вибраций и шума. Деформации вала после испытаний представлены на рисунках 4–6.

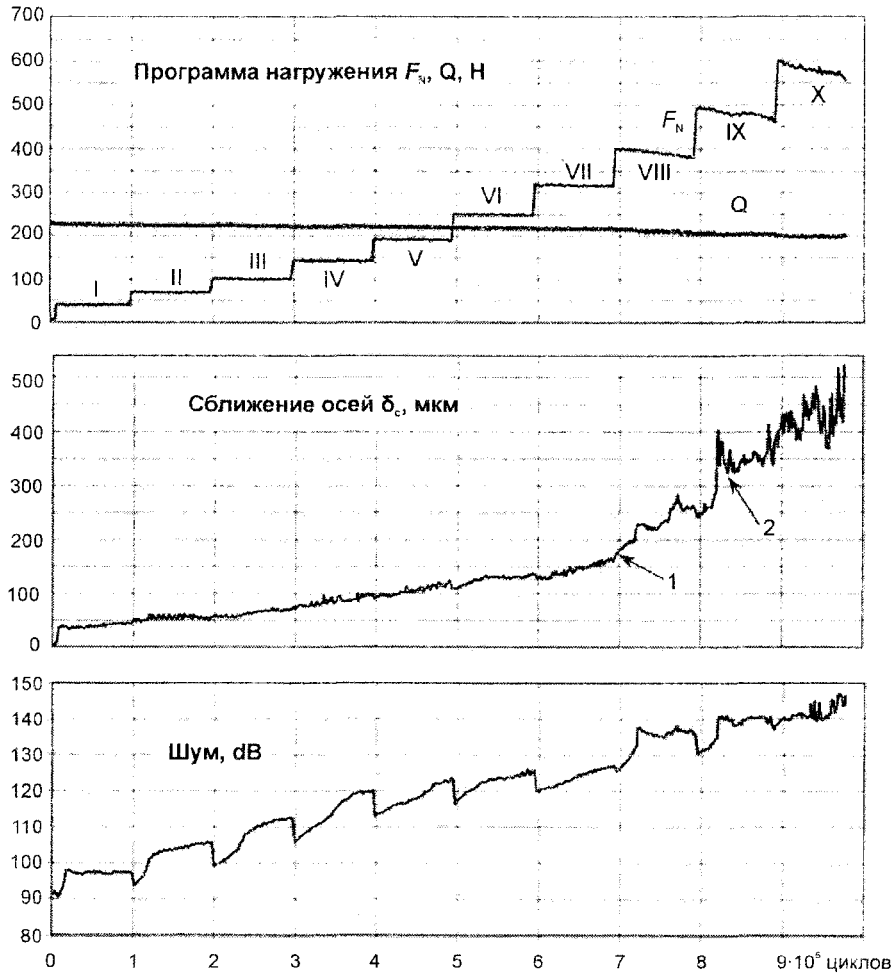


Рисунок 2 – Протокол испытаний системы ролик (сталь 25Х11Г)/вал (сталь 45) на контактно-механическую усталость

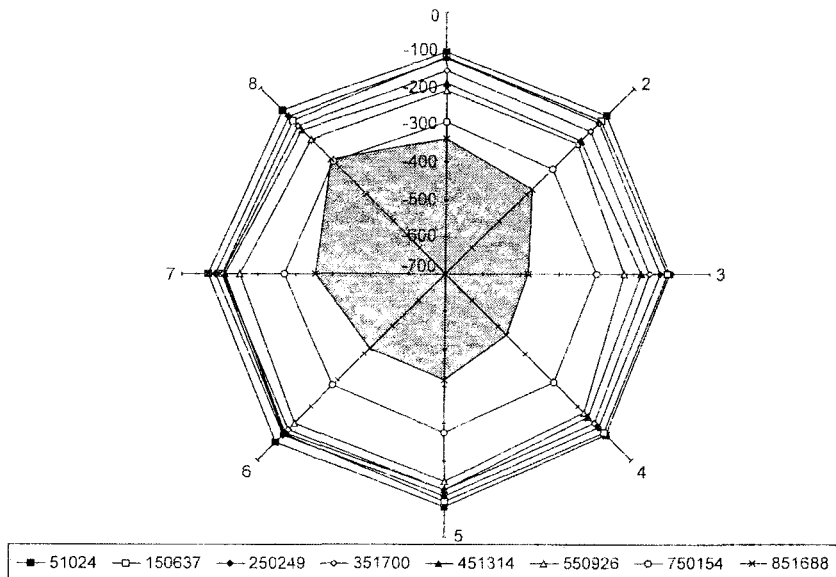


Рисунок 3 – Изменение радиальной остаточной деформации, μm , в зависимости от числа циклов нагружения в 8 точках по диаметру вала

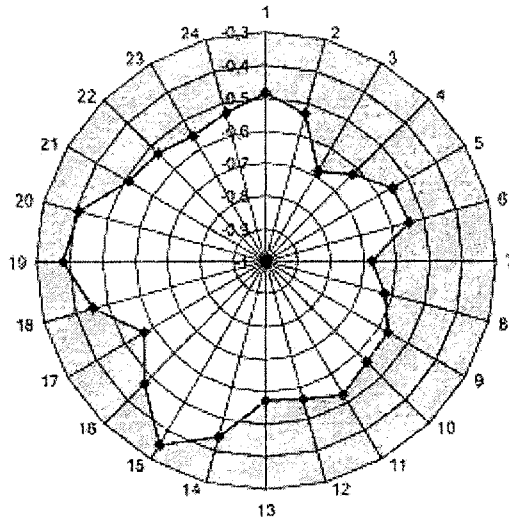


Рисунок 4 – Радиальная остаточная деформация, мм, по диаметру вала после испытаний на контактно-механическую усталость ($N_2 = 976100$ циклов)

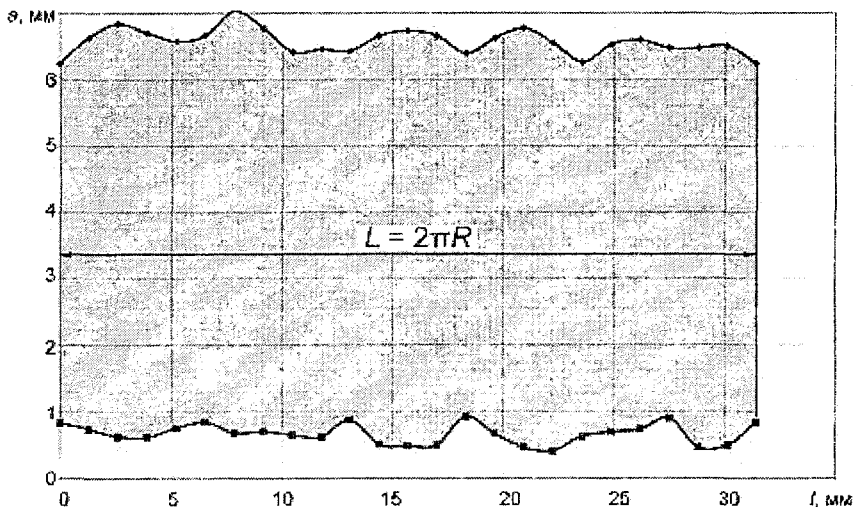


Рисунок 5 – Осевые остаточные волнообразные деформации после испытаний на контактно-механическую усталость ($N_2 = 976100$ циклов), представленные на развертке дорожки качения

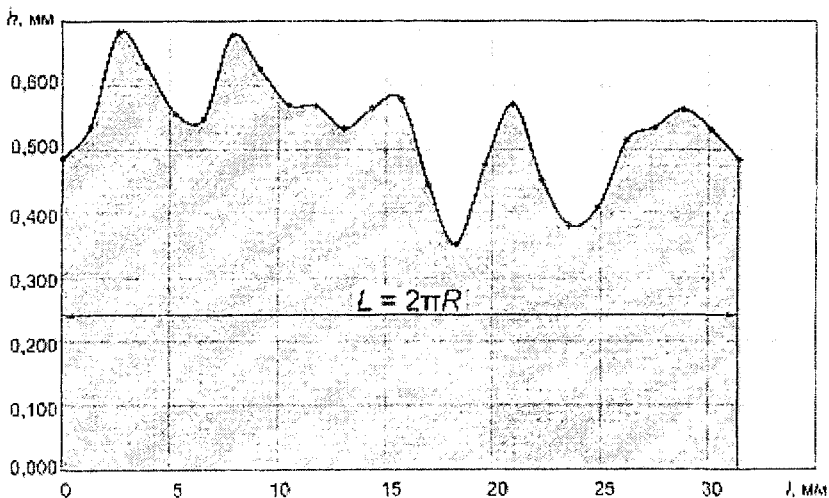


Рисунок 6 – Радиальные остаточные деформации после испытаний на контактно-механическую усталость ($N_2 = 976100$ циклов), представленные на развертке дорожки качения

А на рисунке 7 можно видеть характерные повреждения в окрестности дорожки качения вала: остаточные поверхностные волнообразные повреждения, на дне которых обнаруживаются ямки выкрашивания.

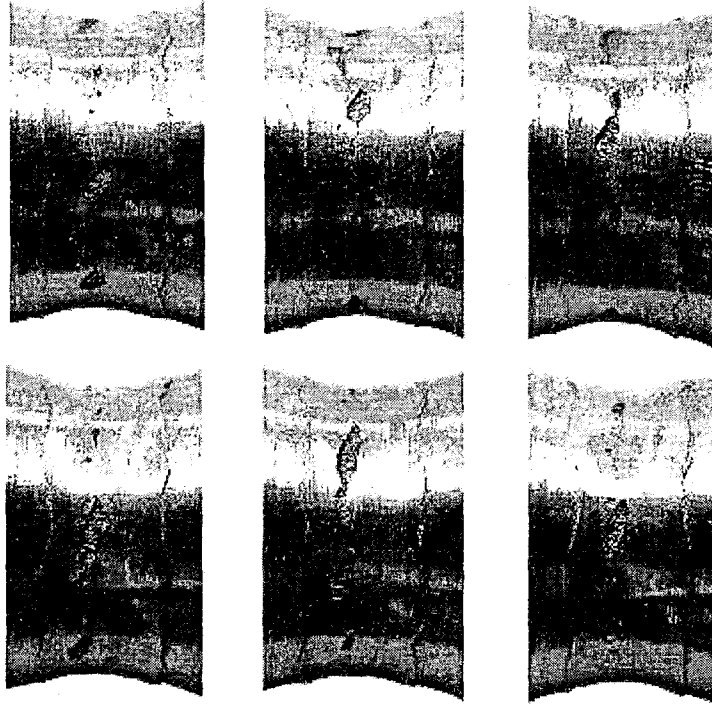


Рисунок 7 – Характер повреждения вала после испытаний на контактно-механическую усталость

Таким образом, в данных условиях испытаний остаточные поверхностные волнообразные повреждения можно рассматривать как результат нестационарного процесса упругопластического деформирования в зоне контактного взаимодействия двух элементов системы. Это явление получило название тропи [5], и этот нестационарный процесс сопровождается трехмерными искажениями размеров дорожки качения обоих элементов и неодинаковым локальным сопротивлением материала в разных “точках” на пути движения (рисунок 8). Прочность материала, оцениваемая, например, твердостью, существенно различна в указанных точках как до, так и после испытаний (рисунок 9).

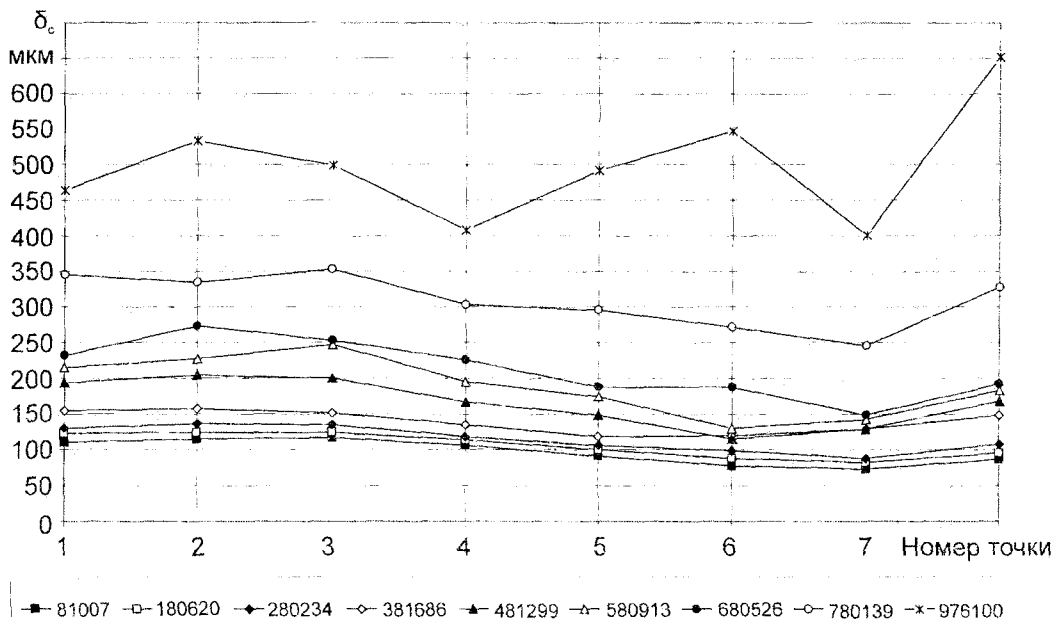


Рисунок 8 – Смещение осей в 8 точках по дорожке катания в зависимости от числа циклов нагружения

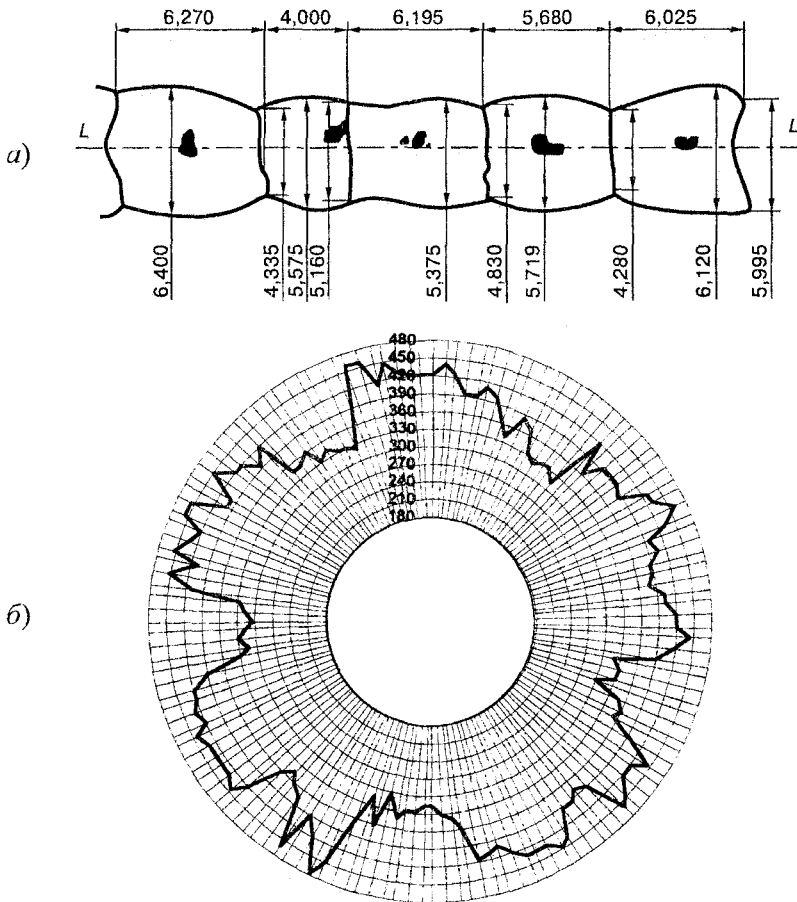


Рисунок 9 – Поверхностные остаточные волнообразные повреждения (ямки выкрашивания зачернены) (а) и распределение микротвердости по длине L дорожки качения вала (б).

Заметим, что исследуемое явление обратимо в следующем смысле: если прочность материала колеса значительно меньше, чем вала, то остаточные волнообразные повреждения образуются на колесе (рисунок 10) [3], тогда как размеры дорожки качения на валу остаются практически неизменными.



Рисунок 10 – Остаточные поверхностные волнообразные повреждения на дорожке качения ролика

Возможно, что остаточные волнообразные повреждения рельсов в процессе эксплуатации есть один из видов тропи.

Аналитическое описание. С теоретической точки зрения описанное повреждение представляет собой результат потери устойчивости движения ролика по валу. Потеря устойчивости движения характеризуется самовозбуждением колебаний в системе и сопровождается упругопластическим деформированием тел в области контакта.

Основные положения. В основу теоретического решения положим следующие представления:

1 Напряжения, обусловленные контактной и внеконтактной нагрузками в силовой системе ролик/вал, действуют одновременно и в единой области.

2 В процессе движения возможно возбуждение колебаний ролика в плоскостях xz , xy и вдоль оси z (рисунок 11, а).

3 В результате потери устойчивости движения изменяются основные параметры контакта: размеры полуосей a и b эллипса контакта, величина наибольшего давления p_0 в центре контакта, сближение осей δ .

4 Потеря устойчивости движения во времени может инициироваться также изменением локальных механических свойств на дорожке качения.

5 В общем случае описание условий потери устойчивости движения учитывает как действие возмущающих силовых факторов, так и изменение во времени геометрических размеров в области контакта; эти изменения могут являться результатом остаточных деформаций.

Постановка задачи. При составлении уравнений колебаний в плоскостях xz и xy примем следующие условия (см. рисунок 11):

1 Ролик упруго заделан на валу таким образом, что при его отклонении на углы ψ и θ возникают восстанавливающие упругие моменты относительно осей y и z соответственно, которые обозначим $k_\psi\psi$ и $k_\theta\theta$.

2 При невозмущенном прямолинейном движении ролик находится в равновесном положении: $\psi = \theta = 0$.

3 Угловая скорость вращения ролика и вала ω считается заданной и одинаковой.

4 При отклонении от положения равновесия ролик будет совершать колебания относительно вертикальной оси z и оси y , параллельной скорости движения.

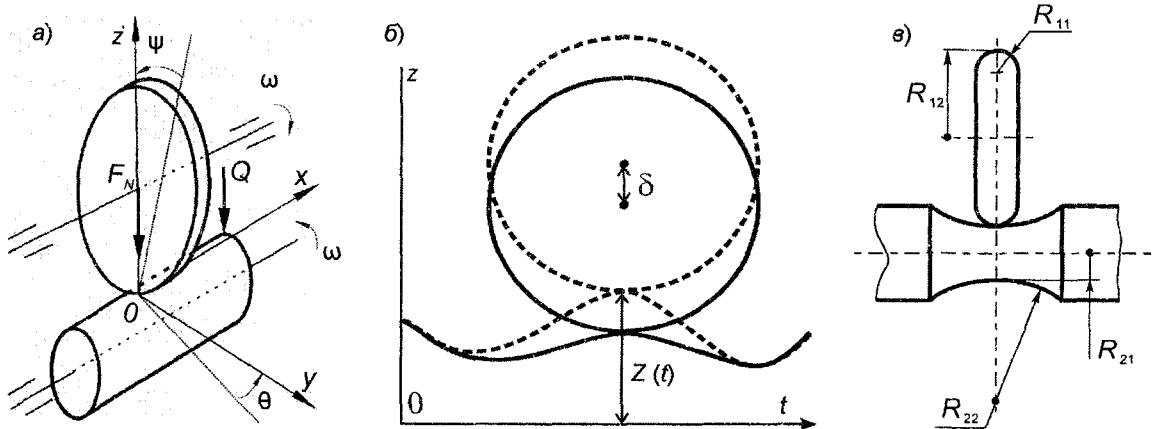


Рисунок 11 – Расчетные схемы (а), (б) и обозначение радиусов кривизны (в)

Обозначим через I_y, I_z, I_{yz} соответственно моменты инерции ролика относительно осей y и z и центробежный момент, а через i – момент инерции ролика относительно его оси вращения. Тогда на основании работ [6, 7] можно записать уравнения движения ролика для малых колебаний при учете гироскопического момента колеса в следующем виде:

$$I_y \ddot{\psi} + I_{yz} \ddot{\theta} + i\omega \dot{\theta} = -k_\psi \psi + M_\psi, \quad I_{yz} \ddot{\psi} + I_z \ddot{\theta} - i\omega \dot{\psi} = -k_\theta \theta + M_\theta. \quad (1)$$

Здесь M_ψ, M_θ – моменты сил, передаваемых на ролик в площадке контакта ролика и вала, относительно осей y и z , $i\omega \dot{\theta}$, $i\omega \dot{\psi}$ – гироскопические моменты относительно осей y и z .

При записи уравнения колебаний вдоль оси z учитываются следующие предположения:

1 Неровности поверхностей ролика и вала описываются законом $Z(t)$ изменения кинематической связи.

2 Упругая восстанавливающая сила $F_N = c\delta^{3/2}$ определяется из величины сближения осей

$\delta = n_\delta \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \eta^2 \sum k F_N^2}$ при контакте исходя из выражения

$$c = \left(n_\delta \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \eta^2 \sum k} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (2)$$

3 Сила инерции, действующая со стороны ролика на вал, определяется как $m\ddot{z}$, где $m = F_N / g$ – величина контактной нагрузки, приложенной к оси ролика, где g – ускорение свободного падения.

4 Абсолютное перемещение ролика вдоль оси z складывается из сближения осей δ ролика и вала при контакте и перемещения ролика в соответствии с законом изменения кинематической связи $Z(t)$:

$$z = \delta + Z(t). \quad (3)$$

В соответствии с принципом Даламбера запишем уравнение колебаний в следующем виде:

$$m\ddot{z} + c\delta^{\frac{3}{2}} = m\ddot{z} + c(z - Z(t))^{\frac{3}{2}} = 0. \quad (4)$$

Решение этого уравнения представляет серьезные трудности в силу нелинейности упругой восстанавливающей силы $c\delta^{\frac{3}{2}}$, что обусловлено особенностями контактного взаимодействия. В силу данного обстоятельства для описания колебаний ролика будем рассматривать уравнение, при составлении которого принимается линейный закон изменения восстанавливающей силы:

$$m\ddot{z} + c(z - Z(t)) = 0. \quad (5)$$

Перепишем уравнение (5) в следующем виде:

$$\ddot{z} + \kappa^2 z = \kappa^2 Z(t), \quad (6)$$

где $\kappa = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

Таким образом, система (1) примет вид:

$$I_y \ddot{\psi} + I_{yz} \ddot{\theta} + i\omega \dot{\theta} = -k_\psi \psi + M_\psi, \quad I_{yz} \ddot{\psi} + I_z \ddot{\theta} - i\omega \dot{\psi} = -k_\theta \theta + M_\theta, \quad \ddot{z} + \kappa^2 z = \kappa^2 Z(t). \quad (7)$$

Параметры площадки контакта. Определение параметров площадки контакта выполним путем решения контактной задачи для пары твердых тел, которые соприкасаются под воздействием силы F_N по эллиптической площадке [8].

В качестве исходных данных будем считать заданными (см. рисунки 1 и 11): нагрузку F_N , радиусы образца R_{11} , R_{12} и контробразца R_{21} , $R_{22} = \infty$, их модули упругости материалов E_1 и E_2 , а также коэффициенты Пуассона μ_1 и μ_2 .

На основании работы [8] запишем трансцендентное уравнение для определения эксцентриситета эллипса контакта e :

$$\frac{1 - \Omega}{1 + \Omega} - (1 - e^2) \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}}{e^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin^2 \varphi) d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}} = 0, \quad (8)$$

где Ω – геометрический параметр;

$$\Omega = \frac{1}{\sum k} \sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{21} - k_{22})^2 + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22}) \cos 2\gamma},$$

$$\sum k = k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}; \quad k_{11} = \frac{1}{R_{11}}, \quad k_{12} = \frac{1}{R_{12}}, \quad k_{21} = \frac{1}{R_{21}}, \quad k_{22} = \frac{1}{R_{22}},$$

γ – угол между наименьшими радиусами кривизны ролика и вала.

Для исследования изменения параметров площадки контакта системы ролик/вал необходимо знание аналитической зависимости e от Ω .

Уравнение (2) можно решить численными методами, воспользовавшись, к примеру, методом Ньютона. Однако для исследования изменения параметров площадки контакта системы ролик/вал необходимо знание аналитической зависимости e от Ω . По рассчитанным парам e^2 и Ω , воспользовавшись методом наименьших квадратов, построим следующую зависимость:

$$\begin{aligned} e^2(\Omega) &= e(\Omega(R_{11}(t), R_{12}(t), R_{21}(t), R_{22}(t), \theta(t))) = \\ &= 2,667\Omega - 3,577\Omega^2 + 4,244\Omega^3 - 5,871\Omega^4 + 10,312\Omega^5 - 18,202\Omega^6 + \\ &+ 24,577\Omega^7 - 21,858\Omega^8 + 11,213\Omega^9 - 2,506\Omega^{10}. \end{aligned} \quad (9)$$

Знание эксцентриситета e позволяет рассчитать параметры эллиптической площадки контакта. Выражения для полуосей эллипса a , b , наибольшего давления p_0 в центре площадки контакта, сближение осей δ представляют в следующей форме:

$$a = n_a \sqrt[3]{\frac{3 \eta F_N}{2 \sum k}}, \quad b = n_b \sqrt[3]{\frac{3 \eta F_N}{2 \sum k}}, \quad p_0 = n_p \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3 \left(\sum k \right)^2}{\eta^2}} F_N, \quad \delta = n_\delta \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \eta^2 \sum k F_N^2}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} n_a &= \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1-\Omega}{1+\Omega} \right) D(e)}, \quad n_b = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1-\Omega}{1+\Omega} \right) (K(e) - D(e)) \sqrt{1-e^2}}, \quad n_p = \frac{1}{n_a n_b}, \\ n_\delta &= K(e) \sqrt[3]{\frac{4}{\pi^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{1-\Omega}{1+\Omega} \right) D(e)}}, \quad \eta = \frac{1-\nu_1}{E_1} + \frac{1-\nu_2}{E_2}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$K(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad L(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad D(e) = \frac{1}{e^2} [K(e) - L(e)] -$$

эллиптические интегралы.

Для параметров площадки контакта в соответствии с положением 5 запишем:

$$a = a(e(t)), \quad b = b(e(t)), \quad \delta = \delta(e(t)), \quad p_0 = p_0(e(t)), \quad (12)$$

Рассмотрим закон изменения радиуса кривизны R_{ij} в виде

$$R_{ij} = R_{ij}^0 \left(1 - m_1(t) \sin(nt) \right)^{m_2(t)}, \quad (13)$$

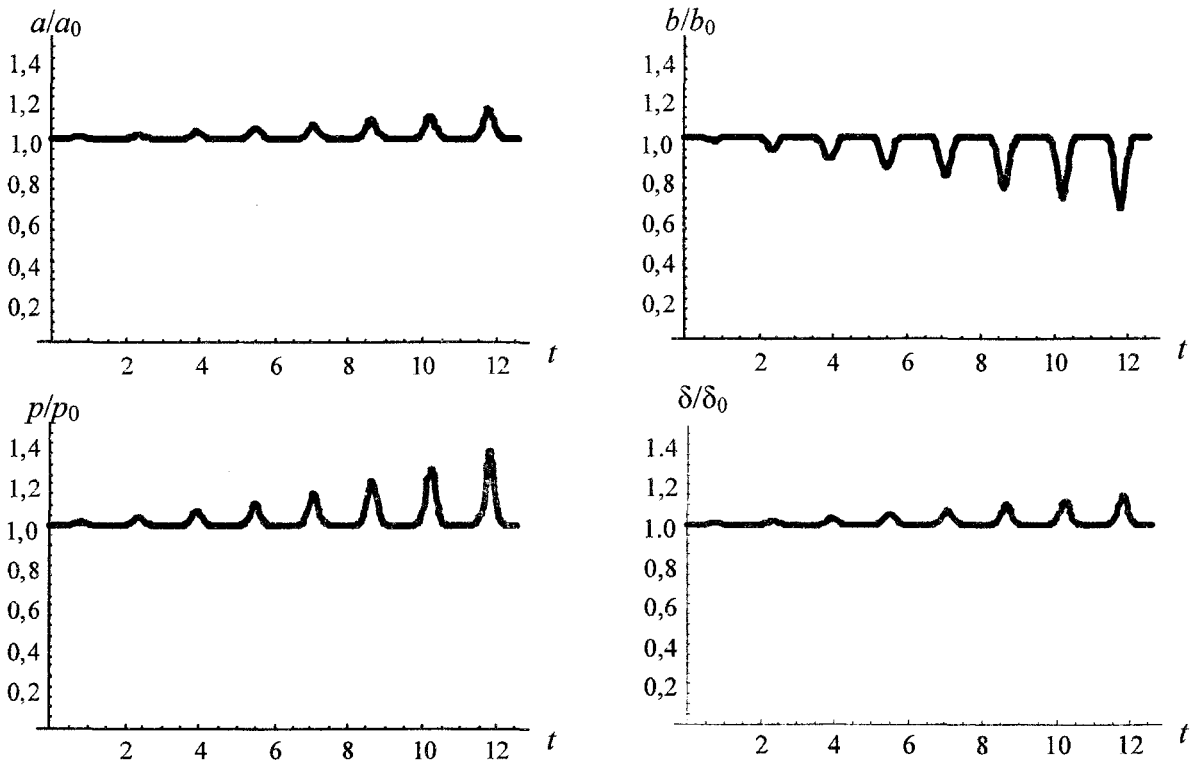
где R_{ij}^0 – среднее значение радиуса кривизны; $m_1(t)$ – функция, определяющая изменение радиуса кривизны при сближении осей вследствие износа и деформирования; n – количество первоначальных дефектов поверхности; $m_2(t)$ – характеристика локальных (поверхностных) свойств материала.

В частности, рассмотрим (13) в следующем виде:

$$R_{ij} = R_{ij}^0 \left(1 - t \sin\left(\frac{2\pi n}{\omega}\right) \right)^{12}, \quad (14)$$

где ω – угловая скорость.

В качестве примера для R_{21} по формуле (14) получены результаты, представленные на рисунке 12.


 Рисунок 12 – Изменение параметров площадки контакта, обусловленное изменением во времени радиуса R_{21} вала

Для принятых условий расчета по графикам можно сделать следующие выводы:

- 1 Нестационарный процесс деформирования сопровождается колебаниями всех параметров контакта, в том числе и контактного давления.
- 2 Изменение величин a и b достигает 20 и 40 % соответственно. Размер малой полуоси изменяется сильнее, чем большой, поскольку было задано изменение радиуса R_{21} .
- 3 Даже при малых изменениях сближения осей (до 20 %), возбуждаются сильные колебания контактного давления (до 50 %), что может приводить к реализации явления троппи.

Сделанные выводы коррелируют в качественном отношении с результатами экспериментов [2–4].

Силовые факторы. В принятой постановке силовыми факторами являются моменты сил, передаваемых на ролик в площадке контакта.

Интегральный момент, обусловленный распределением нормальных усилий $p(x, y)$ по области контакта S и плечом $h(x, y)$,

$$M(x, y) = \iint_S h(x, y) p(x, y) dx dy. \quad (15)$$

Для упрощения интегрирования целесообразно использовать следующую связь между системой координат, жестко связанной с эллипсом контакта, и глобальной системой координат при повороте эллипса контакта на углы θ и ψ (рисунок 13):

$$x = x' \cos \theta + y' \sin \theta + R \sin \psi, \quad x = -x' \sin \theta + y' \cos \theta, \quad z = z', \quad (16)$$

где $R=R_{12}$ – большой радиус ролика; x, y, z представляют собой глобальную систему координат, $x' = ar \cos \varphi$, $y' = br \sin \varphi$, z' – локальную систему координат, жестко связанную с эллипсом контакта.

С учетом (16) выражение (15) примет вид

$$M_\psi^p(x', y') = \iint_{S'} h_x(x(x', y')) p(x', y') dx' dy'. \quad (17)$$

Дифференциал момента относительно оси y в локальной системе координат:

$$dM_\psi^p = (R \sin \psi + ar \cos \varphi \cos \theta + br \sin \varphi \sin \theta) p_0 \sqrt{1 - r^2} ab r dr d\varphi. \quad (18)$$

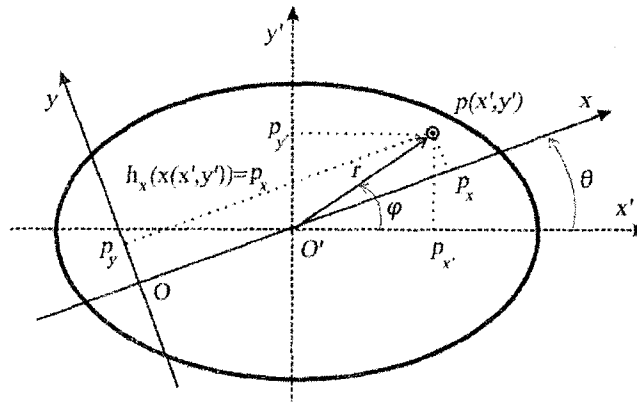


Рисунок 13 – К определению момента M_{ψ}^p

Соответственно, момент

$$M_{\psi}^p = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (R \sin \psi + ar \cos \varphi \cos \theta + br \sin \varphi \sin \theta) p_0 \sqrt{1-r^2} ab r dr d\varphi. \quad (19)$$

Интеграл (19) легко находится:

$$M_{\psi}^p = \frac{2\pi}{3} p_0 ab R \sin \psi = F_N R \sin \psi. \quad (20)$$

Отсюда видно, что поскольку интеграл по $\varphi \in [0...2\pi]$ от функций \sin и \cos равен 0, то полученное выражение не зависит от θ . Это естественно вытекает из того, что суммарный момент относительно оси y остается неизменным при вращении ролика относительно оси z .

Рассмотрим поверхностное распределение усилий, вызванных действием нагрузки Q , изгибающей вал. Вал представляется как изогнутый брус. Тогда напряжения

$$\sigma_x = -\frac{Q(l-\xi)z}{J_y}, \quad (21)$$

где $J_y = \pi r^4 / 4$ – момент инерции бруса круглого сечения; ξ – расстояние от рассматриваемой точки до точки консольного закрепления.

Следовательно, на поверхности имеют место напряжения

$$\sigma_x = -\frac{Q(l-\xi)h}{2J_y}, \quad (22)$$

где $h = R_{21} - \delta$.

Запишем выражение для интегрального момента относительно оси y , обусловленного распределением изгибного напряжения σ_x на поверхности вала в локальной системе координат:

$$M_{\psi}^{\sigma}(x', y') = \iint_{S'} h_z(z) \sigma_x(x(x'), y(y')) dx' dy'. \quad (23)$$

Дифференциал момента (21)

$$dM_{\psi}^{\sigma} = -f(r, \varphi) R \cos \psi \frac{Q(l - A - (R \sin \psi + ar \cos \varphi \cos \theta + br \sin \varphi \sin \theta))h}{2J_y} ab r dr d\varphi, \quad (24)$$

где A – расстояние от центра эллипса контакта до точки консольного закрепления вала; $f(r, \varphi) > 0$ – функция, имеющая природу коэффициента трения скольжения, такая, что $\max_{r, \varphi} f(r, \varphi) < 1$.

В силу эллиптичности площадки контакта представляется оправданным рассмотрение $f(r, \varphi)$ в виде

$$f(r, \varphi) = f_0 \sqrt{1 - r^2}. \quad (25)$$

В соответствии с (24) момент

$$M_{\psi}^p = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -f(r, \varphi) R \cos \psi \frac{Q(l - A - (R \sin \psi + ar \cos \varphi \cos \theta + br \sin \varphi \sin \theta))h}{2J_y} abrd\varphi. \quad (26)$$

При $f(r, \varphi) = f_0$ (26) принимает вид

$$M_{\psi}^p = -\frac{f_0 Q \pi abh}{2J_y} R \cos \psi (A - 1 + R \cos \psi), \quad (27)$$

а при $f(r, \varphi) = f_0 \sqrt{1 - r^2}$ (26) принимает вид

$$M_{\psi}^p = -\frac{f_0 Q \pi abh}{3J_y} R \cos \psi (A - 1 + R \cos \psi). \quad (28)$$

Выражения (27), (28) не зависят от θ . Это естественно вытекает из того, что суммарный момент относительно оси y остается неизменным при вращении ролика относительно оси z .

Момент относительно оси z , обусловленный распределением по поверхности вала изгибного напряжения σ_x , определим по формуле

$$M_{\theta}^{\sigma} (x', y') = \iint_{S'} h_y (y(x', y')) \sigma_x (x', y') dx' dy'. \quad (29)$$

Дифференциал момента (29) от напряжения σ_x , распределенного по области контакта в локальной системе координат,

$$dM_{\psi}^{\sigma} = -f(r, \varphi) (-ar \cos \varphi \sin \theta + br \sin \varphi \cos \theta) \times \frac{Q(l - A - (R \sin \psi + ar \cos \varphi \cos \theta + br \sin \varphi \sin \theta))h}{2J_y} abrd\varphi. \quad (30)$$

Соответственно, момент

$$M_{\psi}^{\sigma} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -f(r, \varphi) (-ar \cos \varphi \sin \theta + br \sin \varphi \cos \theta) \times \frac{Q(l - A - (R \sin \psi + ar \cos \varphi \cos \theta + br \sin \varphi \sin \theta))h}{2J_y} abrd\varphi. \quad (31)$$

При $f(r, \varphi) = f_0$ из (29) имеем

$$M_{\psi}^{\sigma} = \frac{f_0 Q \pi abh}{4J_y} (a^2 - b^2) \sin 2\theta, \quad (32)$$

а при $f(r, \varphi) = f_0 \sqrt{1 - r^2}$ из (29) получим

$$M_{\psi}^{\sigma} = \frac{f_0 Q \pi abh}{30J_y} (a^2 - b^2) \sin 2\theta. \quad (33)$$

Полученные выражения (32) и (33) не зависят от ψ . Это естественно вытекает из того, что суммарный момент относительно оси z остается неизменным при вращении ролика относительно оси y .

Определим суммарный момент относительно оси z , вызванный распределением касательных к поверхности усилий вида $f_r P_0 \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}}$, обуславливаемых действием силы трения при качении ($f_r < 1$ – коэффициент трения качения):

$$M_{\theta}^{fp}(x', y') = \iint_{S'} h_x(x(x', y'), y') f_r p(x', y') dx' dy'. \quad (34)$$

Дифференциал момента (34) относительно оси z в локальной системе координат:

$$dM_{\theta}^{fp} = (R \sin \psi + ar \cos \varphi \cos \theta + br \sin \varphi \sin \theta) (\pm f_r p_0 \sqrt{1-r^2}) abrd\varphi dr d\psi. \quad (35)$$

Знак плюс перед f_r удерживается при расчете момента для вала, а минус – при расчете момента для ролика.

Соответственно, момент

$$M_{\theta}^{fp} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (R \sin \psi + ar \cos \varphi \cos \theta + br \sin \varphi \sin \theta) (\pm f_r p_0 \sqrt{1-r^2}) abrd\varphi dr d\psi. \quad (36)$$

Этот интеграл легко находится:

$$M_{\theta}^{fp} = \pm \frac{2\pi}{3} f_r p_0 abR \sin \psi = \pm f_r F_N R \sin \psi. \quad (37)$$

Аналитическая модель. Общая система дифференциальных уравнений движения получена в виде

$$\begin{aligned} I_y \ddot{\psi} + I_{yz} \ddot{\theta} + i\omega \dot{\theta} &= -k_{\psi} \psi + M_{\psi}^p + M_{\psi}^{\sigma}, \\ I_{yz} \ddot{\psi} + I_z \ddot{\theta} - i\omega \dot{\psi} &= -k_{\theta} \theta + M_{\theta}^{fp} + M_{\theta}^{\sigma}, \\ \ddot{z} + \kappa^2 z &= \kappa^2 Z(t). \end{aligned} \quad (38)$$

Первые два уравнения системы (38) – это уравнения Лагранжа 2-го рода, но с правой частью, соответствующей нашей постановке задачи; при их формализации использованы уравнения Келдыша для шимми [6].

Моменты сил, действующих на ролик в площадке контакта,

$$\begin{aligned} M_{\psi}^p &= M_{\psi}^p(F_N, \psi(t)), \\ M_{\psi}^{\sigma} &= M_{\psi}^{\sigma}(Q(t), a(t), b(t), \delta(t), \psi(t)), \\ M_{\theta}^{\sigma} &= M_{\theta}^{\sigma}(Q(t), a(t), b(t), \delta(t), \theta(t)), \\ M_{\theta}^{fp} &= M_{\theta}^{fp}(F_N, f_r, \psi(t)). \end{aligned} \quad (39)$$

Система (38) записана с учетом полученной нами аналитической зависимости (9) эксцентриситета e эллипса контакта от радиусов R кривизны тел в точке контакта, которая определяет изменение параметров контакта во времени.

Рассмотрим систему (38) при $f(r, \varphi) = f_0$. В частном случае, когда параметры a, b, p_0, δ не зависят от времени, уравнения (38), с учетом (20), (27), (32), (37) принимают вид:

$$\begin{aligned} I_y \ddot{\psi} + I_{yz} \ddot{\theta} + i\omega \dot{\theta} &= -k_{\psi} \psi + F_N R \sin \psi - \frac{f_0 Q \pi abh}{2J_y} R \cos \psi (A - 1 + R \cos \psi), \\ I_{yz} \ddot{\psi} + I_z \ddot{\theta} - i\omega \dot{\psi} &= -k_{\theta} \theta \pm f_r F_N R \sin \psi + \frac{f_0 Q \pi abh}{4J_y} (a^2 - b^2) \sin 2\theta, \\ \ddot{z} + \kappa^2 z &= \kappa^2 \left[\frac{1}{2} a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} (a_s \cos spt + b_s \sin spt) \right], \end{aligned} \quad (40)$$

где $\frac{1}{2} a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} (a_s \cos spt + b_s \sin spt)$ – тригонометрический ряд, которым в общем случае может быть представлено кинематическое возмущение колебаний вдоль оси z .

Уравнения (40) учитывают возможность колебаний ролика в трех плоскостях, особенности геометрии взаимодействующих элементов в области контакта, неоднородность поверхностных свойств материала в локальных зонах вдоль дорожки качения, возмущающее действие внешних (контактной и внеконтактной) нагрузок.

Рассмотрим решение данной системы, основанное на следующих основных упрощениях:

1 Центробежный момент инерции I_{yz} примем равным 0. Такое упрощение оправданно, поскольку ролик, используемый в износоусталостных испытаниях, представляет собой диск с профильным радиусом (рисунки 1 и 12), и, следовательно, оси y и z являются главными центральными осями.

2 В гармонических функциях правой части первых двух уравнений системы (40) примем $\psi = \theta = t$. Это упрощение сделаем на том основании, что значения моментов сил, передаваемых на ролик, зависят от малых (в силу упругой заделки ролика на валу вращения) изменений углов ψ и θ во времени.

3 Кинематическое возмущение колебаний вдоль оси z будем рассматривать в виде $Z(t) = Z_0 \sin(pt + \tau)$.

Теперь система (40) примет вид (41), (42):

$$I_{yz}\ddot{\psi} - i\omega\dot{\psi} + k_\theta\theta = \pm f_r F_N R \sin t + \frac{f_0 Q \pi a b h}{4J_y} (a^2 - b^2) \sin 2t, \quad (41)$$

$$\ddot{z} + \kappa^2 z = \kappa^2 Z_0 \sin(pt + \tau). \quad (42)$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений (41) является суммой общего решения ψ_0 однородной системы

$$I_y\ddot{\psi} + i\omega\dot{\psi} + k_\psi\psi = 0, \quad I_{yz}\ddot{\psi} - i\omega\dot{\psi} + k_\theta\theta = 0, \quad (43)$$

представляющего колебания, имеющие частоты свободных колебаний, и частного решения ψ_1 системы (41).

Частное решение однородной системы (41) можно определить в виде гармонических колебаний одинаковой частоты и отличающихся по фазе на $\pi/2$:

$$\psi_0 = A \sin(kt + \alpha), \quad \theta_0 = B \cos(kt + \alpha). \quad (44)$$

Подстановка в (44) приводит к двум уравнениям:

$$A(k_\psi - I_y k^2) - B i k \omega = 0, \quad B(k_\theta - I_z k^2) - A i k \omega = 0, \quad (45)$$

из которых находим:

$$\beta = \frac{B}{A} = \frac{(k_\psi - I_y k^2)}{i k \omega} = \frac{i k \omega}{(k_\theta - I_z k^2)}. \quad (46)$$

Для определения k^2 получаем уравнение

$$(k_\psi - I_y k^2)(k_\theta - I_z k^2) - i^2 k^2 \omega^2 = 0. \quad (47)$$

Через k_1 и k_2 обозначены корни этого уравнения. Каждому из этих корней соответствует частное решение системы уравнений (44):

$$\psi_0^1 = C_1 \sin(k_1 t + \alpha_1), \quad \theta_0^1 = \beta_1 C_1 \cos(k_1 t + \alpha_1), \quad (48)$$

$$\psi_0^2 = C_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \quad \theta_0^2 = \beta_2 C_2 \cos(k_2 t + \alpha_2),$$

где множители β_1 и β_2 определяются по (46) при замене k на k_1 и соответственно на k_2 :

$$\beta_1 = \frac{(k_\psi - I_y k_1^2)}{ik_1 \omega} = \frac{ik_1 \omega}{(k_\theta - I_z k_1^2)}, \quad \beta_2 = \frac{(k_\psi - I_y k_2^2)}{ik_2 \omega} = \frac{ik_2 \omega}{(k_\theta - I_z k_2^2)}. \quad (49)$$

Сумма частных решений (48)

$$\psi_0 = C_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \quad \theta_0 = \beta_1 C_1 \cos(k_1 t + \alpha_1) + \beta_2 C_2 \cos(k_2 t + \alpha_2) \quad (50)$$

содержит четыре произвольных постоянных $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$ и поэтому представляет общее решение однородной системы (43).

Частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (41) будем искать в виде:

$$\psi_1 = A_1 \cos(2t) + A_2 \sin(2t) + A_3 \sin t + A_4 \cos t, \quad \theta_1 = B_1 \cos(2t) + B_2 \sin(2t) + B_3 \sin t + B_4 \cos t. \quad (51)$$

Подстановка в (41) приводит к восьми линейным уравнениям, определяющим амплитуды A_i и B_i , $i = 1 \dots 4$:

$$\begin{aligned} A_1(k_\psi - 4I_y) + 2B_2 i \omega &= 0, & B_1(k_\theta - 4I_z) - 2A_2 i \omega &= 0, \\ A_2(k_\psi - 4I_y) - 2B_1 i \omega &= -\frac{f_0 Q \pi a b h}{4J_y} R^2, & B_2(k_\theta - 4I_z) + 2A_1 i \omega &= \frac{f_0 Q \pi a b h}{4J_y} (a^2 - b^2), \end{aligned} \quad (52)$$

$$A_3(k_\psi - I_y) - B_4 i \omega = \frac{2\pi}{3} p_0 a b R, \quad B_3(k_\theta - I_z) + A_4 i \omega = \pm \frac{2\pi}{3} f_r p_0 a b R,$$

$$A_4(k_\psi - I_y) + B_3 i \omega = -\frac{(A-1)f_0 Q \pi a b h}{2J_y} R, \quad B_4(k_\theta - I_z) - A_3 i \omega = 0,$$

Из которых получим:

$$\begin{aligned} A_1 &= 2K_1 i \omega D_5, & B_1 &= -2K_1 i \omega D_3, \\ A_2 &= K_1(4I_z - k_\theta) D_3, & B_2 &= K_1(k_\theta - 4I_z) D_5, \\ A_3 &= K_2(I_z - k_\theta) D_2, & B_3 &= K_2((I_y - k_\psi) D_4 + i \omega D_1), \\ A_4 &= K_2((I_z - k_\theta) D_2 + i \omega D_4), & B_4 &= -K_2 i \omega D_2, \end{aligned} \quad (53)$$

где

$$D_1 = -\frac{(A-1)f_0 Q \pi a b h}{2J_y} R, \quad D_2 = \frac{2\pi}{3} p_0 a b R, \quad D_3 = -\frac{f_0 Q \pi a b h}{4J_y} R^2,$$

$$D_4 = \pm \frac{2\pi}{3} f_r p_0 a b R, \quad D_5 = \frac{f_0 Q \pi a b h}{4J_y} (a^2 - b^2),$$

$$K_1 = \frac{1}{(k_\theta - 4I_z)(4I_y - k_\psi) + 4i^2 \omega^2}, \quad K_2 = \frac{1}{(k_\theta - I_z)(I_y - k_\psi) + i^2 \omega^2}.$$

Легко убедиться, что при подстановке A_i и B_i , $i=1 \dots 4$, определенных по формулам (52), в (51) уравнения (41) превращаются в тождества. Следовательно, функции

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 2K_1 i \omega D_5 \cos(2t) + K_1(4I_z - k_\theta) D_3 \sin(2t) + K_2(I_z - k_\theta) D_2 \sin t + \\ &+ K_2((I_z - k_\theta) D_2 + i \omega D_4) \cos t, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -2K_1 i \omega D_3 \cos(2t) + K_1(k_\theta - 4I_z) D_5 \sin(2t) + K_2((I_y - k_\psi) D_4 + i \omega D_1) \sin t - \\ &- K_2 i \omega D_2 \cos t \end{aligned}$$

являются частным решением системы неоднородных уравнений (41).

Таким образом, общее решение системы дифференциальных уравнений (41) является суммой общего решения однородной системы (43) и частного решения системы (41):

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \psi_1 = C_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) + 2K_1 i \omega D_5 \cos(2t) + \\ &+ K_1 (4I_z - k_\theta) D_3 \sin(2t) + K_2 (I_z - k_\theta) D_2 \sin t + K_2 ((I_z - k_\theta) D_2 + i \omega D_4) \cos t, \\ \theta &= \theta_0 + \theta_1 = C_1 \beta_1 \cos(k_1 t + \alpha_1) + C_2 \beta_2 \cos(k_2 t + \alpha_2) - 2K_1 i \omega D_3 \cos(2t) + \\ &+ K_1 (k_\theta - 4I_z) D_5 \sin(2t) + K_2 ((I_y - k_\psi) D_4 + i \omega D_1) \sin t - K_2 i \omega D_2 \cos t. \end{aligned} \quad (55)$$

Константы $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$ можно определить из начальных условий

$$t_0 = 0, \quad \psi(t_0) = 0, \quad \theta(t_0) = 0, \quad \dot{\psi}(t_0) = 0, \quad \dot{\theta}(t_0) = 0, \quad (56)$$

решив соответствующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \psi(0) &= C_1 \sin(\alpha_1) + C_2 \sin(\alpha_2) + 2K_1 i \omega D_5 + K_2 ((I_z - k_\theta) D_2 + i \omega D_4) = 0, \\ \theta(0) &= C_1 \beta_1 \cos(\alpha_1) + C_2 \beta_2 \cos(\alpha_2) - 2K_1 i \omega D_3 - K_2 i \omega D_2 = 0, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\dot{\psi}(0) = C_1 k_1 \cos(\alpha_1) + C_2 k_2 \cos(\alpha_2) + K_2 D_2 (I_z - k_\theta) + 2K_1 D_3 (4I_z - k_\theta) = 0,$$

$$\dot{\theta}(0) = -C_1 \beta_1 k_1 \sin(\alpha_1) - C_2 \beta_2 k_2 \sin(\alpha_2) - 2K_1 D_5 (4I_z - k_\theta) + K_2 ((I_y - k_\psi) D_4 + i \omega D_1) = 0.$$

Общее решение дифференциального уравнения (42) имеет вид

$$z(t) = H_1 \cos(\kappa t) + H_2 \sin(\kappa t) + \frac{Z_0}{\kappa^2 - p^2} \sin(pt + \tau). \quad (58)$$

Константы H_1, H_2 можно определить из начальных условий

$$t_0 = 0, \quad z(t_0) = z_0, \quad \dot{z}(t_0) = V_{0z}, \quad (59)$$

решив соответствующую систему уравнений:

$$z_0 = H_1 + \frac{Z_0}{\kappa^2 - p^2} \sin \tau, \quad (60)$$

$$V_{0z} = -\kappa H_1 \sin(\kappa t) + \kappa H_2 \cos(\kappa t) + \frac{pZ_0}{\kappa^2 - p^2} \cos(pt + \tau).$$

Таким образом, уравнение (58) примет вид

$$z(t) = z_0 \cos \kappa t + \frac{V_{0z}}{\kappa} \sin \kappa t - \frac{Z_0}{\kappa^2 - p^2} \left(\sin \tau \cos \kappa t + \frac{p}{\kappa} \cos \tau \sin \kappa t \right) + \frac{Z_0}{\kappa^2 - p^2} \sin(pt + \tau). \quad (61)$$

Согласно представленному решению нестационарный процесс деформирования в анализируемых условиях сопровождается колебаниями всех параметров контакта, а также контактного давления.

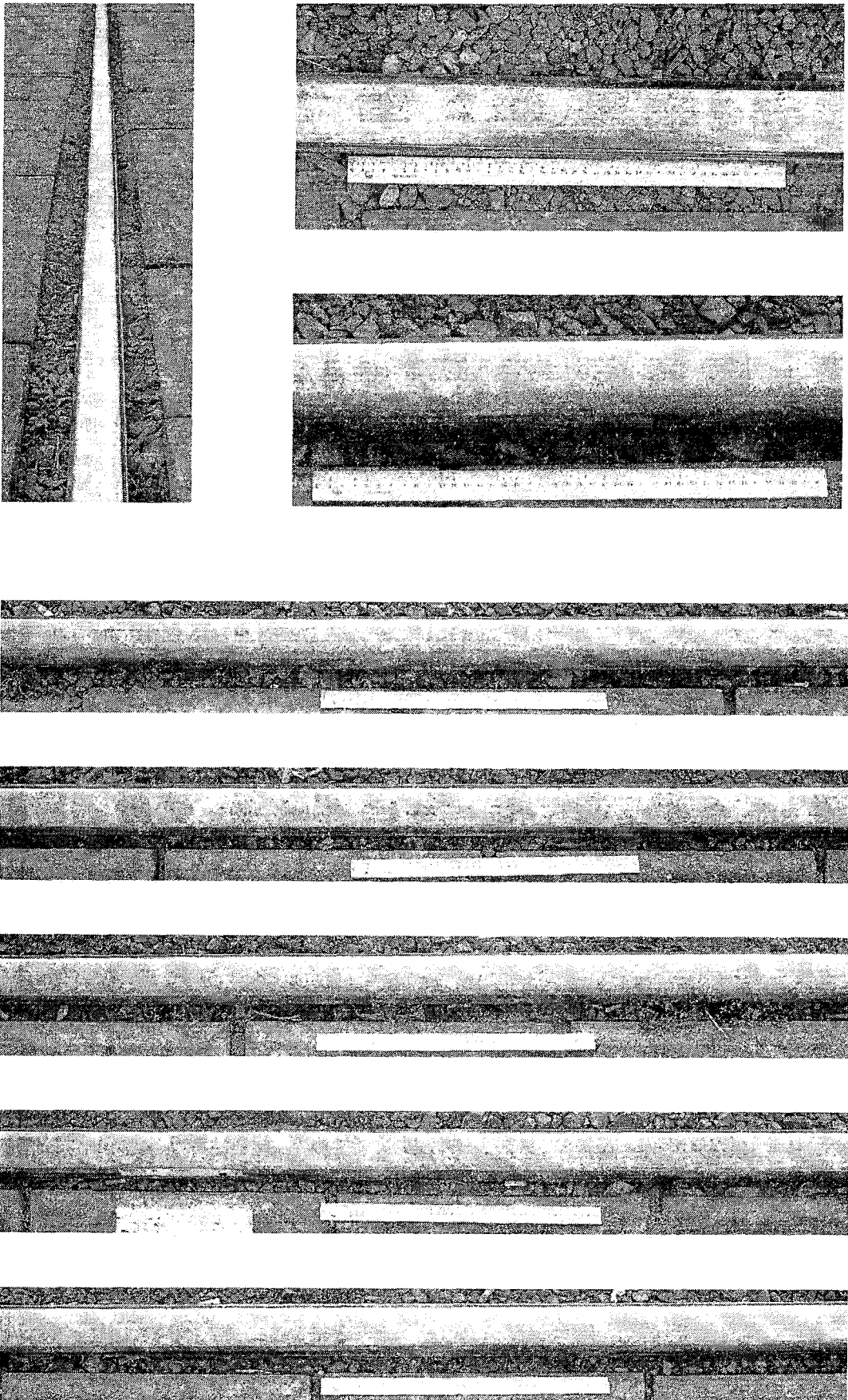


Рисунок 14 – Волнообразные повреждения трамвайных рельсов

Основные выводы:

1 Выполнены экспериментальное и аналитическое исследования условий формирования и характера волнообразных остаточных поверхностных повреждений в силовой системе типа ролик/вал при контактно-механической усталости. Экспериментально установлено, что такие повреждения можно рассматривать как результат процесса нестационарного упругопластического деформирования в зоне контактного взаимодействия двух элементов системы. С теоретической точки зрения такое повреждение представляет собой результат потери устойчивости движения ролика по валу.

Отсюда следует, что в системе колесо/рельс, которая работает в подобных условиях, могут наблюдаться аналогичные повреждения. Действительно, они обнаружены на рельсах трамвайных линий (рисунок 14).

2 В соответствии с постановкой задачи записаны общие дифференциальные уравнения (38) движения ролика по валу, которые учитывают:

- возможность колебаний ролика в трех плоскостях;
- особенности геометрии взаимодействующих элементов в области контакта;
- неоднородность поверхностных свойств материала в локальных зонах вдоль дорожки катания;
- возмущающее действие внешних (контактной и внеконтактной) нагрузок.

Показано, что нестационарный процесс деформирования в анализируемых условиях сопровождается колебаниями всех параметров контакта, а также контактного давления.

3 Выражения (20), (27), (28), (32), (33), (37) для моментов, обуславливающих возмущение движения ролика, получены аналитически из анализа условий нагружения и контактного взаимодействия. Таким образом, предложена методика учета возмущающего действия силовых факторов путем определения интегральных моментов от распределенных усилий, передаваемых на ролик в зоне контакта.

4 Получена формула (9) для расчета эксцентриситета эллипса контакта, что позволяет аналитически описать изменение параметров контакта во времени (см. формулу (12)).

5 Предложена формула (13) для прогнозирования изменения во времени радиусов кривизны взаимодействующих элементов силовой системы.

6 При расчете интегралов (17), (23), (29), (34) от распределенных по площадке контакта усилий применен оригинальный переход (16) к локальной системе координат, жестко связанной с эллипсом контакта (см. рисунок 13).

Список литературы

- 1 Новые способы испытаний применительно к системе колесо/рельс / С. А. Тюрин [и др.]. // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт, – 2005. – № 2. – С. 54–63.
- 2 **Сосновский, Л. А.** Основы трибофатики / Л. А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2003. – Т.1 – 246 с.; Т.2 – 234 с.
- 3 **Сосновский, Л. А.** Риск (Механотермодинамика необратимых повреждений) / Л. А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2004. – 317 с.
- 4 **Сосновский, Л. А.** Экспериментальные исследования контактно-механической усталости стали 45 методом многоступенчатого нагружения / Л. А. Сосновский // Заводская лаборатория. – 1996. – №3. – С.30–34.
- 5 L. A. Sosnovskiy, S. S. Shcherbakov Tropic Phenomenon, Proceedings of World Tribology Congress III (September 12-16, 2005, Washington D.C., USA). – 2 pp.
- 6 **Келдыш, М. В.** Шимми переднего колеса трехколесного шасси: избранные труды. Механика / М. В. Келдыш. – М.: Наука, 1985. – С. 491–530.
- 7 **Малкин, И. Г.** Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин. – М.: Наука, 1985. – 530 с.
- 8 **Джонсон, К.** Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 555 с.

Получено 25.04.2005

L. A. Sosnovskiy, S. S. Shcherbakov. Formation of residual waveform surface damages at mechano-rolling fatigue.

Results of the theoretical analysis of special type of limiting condition - formations on a track of rolling of residual waveform damages are stated. General differential equations of motion of a roller on the bank are recorded. The technique of the count of disturbing action of active factors is offered by definition of the integral moments from the distributed efforts transmitted on a roller in a contact zone.