

Теперь можно применить теорему А.П. Маркеева [2], согласно которой положение равновесия является устойчивым при выполнении неравенства

$$|c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}| > 3\sqrt{3(A_1^2 + A_2^2)} \quad (15)$$

и неустойчивым в противном случае. Вычисляя значения коэффициентов (12), (13), (14) в точках, расположенных на резонансной кривой, определяемой соотношением $\sigma_1 = 3\sigma_2$, и проверяя условие (15), можно сделать следующий вывод.

Теорема. Положения равновесия S_1, S_7 в ограниченной задаче четырех тел, сформулированной на основе треугольных решений Лагранжа, являются устойчивыми по Ляпунову при резонансе четвертого порядка вида $\sigma_1 = 3\sigma_2$, если $\mu_2 > 0,001178$ и $\mu_1 > 0,001178$ соответственно. Положение равновесия S_4 является неустойчивым при резонансе $\sigma_1 = 3\sigma_2$ для любых значений параметров μ_1, μ_2 .

1. Себехей В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М., 1982.
2. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М., 1978.
3. Grebenikov E.A., Gadomski L., Prokopenya A.N. // Nonlinear oscillations. 2007. Vol. 10. № 1. P. 66.
4. Budzko D.A. // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Evolution, control and stability of dynamical systems. Siedlce, 2009. P. 28.
5. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения / Под ред. Г. Мюнц. Череповец, 2000.

Поступила в редакцию 03.10.09.

Дмитрий Александрович Будько – аспирант кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений БрГУ им. А.С. Пушкина. Научный руководитель – А.Н. Прокопеня.

Александр Николаевич Прокопеня – доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений БрГУ им. А.С. Пушкина.

УДК 539.3

С.С. ЩЕРБАКОВ, Д.Е. МАРМЫШ

СОСТОЯНИЕ ПОВРЕЖДЕННОСТИ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

The technique for determination of damage of complexly loaded mechanical system based on model of the deformable rigid body with dangerous is considered. Calculation of damage of roller-shaft tribo-fatigue the system working in the conditions of contact interaction and not contact bending is made. Considerable change of the damage of the given system in comparison with of the damage of the system subject to separate types of loading is shown.

Применительно к трибофатическим системам, т. е. таким, которые работают в условиях контактного взаимодействия между элементами системы, будучи одновременно нагруженными неконтактными силами [1, 2], развивается комплексный подход к определению поврежденного состояния. Состояние трибофатической системы в некотором ее элементарном объеме может оцениваться в соответствии с моделью деформированного твердого тела с опасным объемом как поврежденное при достижении (в том числе одновременном) некоторыми компонентами тензора напряжений (деформаций) своих предельных значений. Множество таких элементарных объемов представляет собой в общем случае трехмерную область, называемую опасным объемом. Особое значение имеет изучение влияния соотношения контактных и неконтактных нагрузок на состояние поврежденности, т. е. величину и форму опасных объемов.

Расчет опасных объемов основывается на предварительном определении пространственного напряженно-деформированного состояния элементов трибофатической системы, вызванного как локальным (контактным), так и объемным (неконтактным) нагружением:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}^{(c)}|_S = p(F_c, S), \sigma_{\tau\tau}^{(c)}|_S = fp(F_c, S), \sigma_{ij}^{(c)}|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \\ Q|_{S_y} = Q(F_b), N|_{S_x} = N(F_b), M|_{S_m} = M(F_b), u_i|_{S_b} = u_b, \end{aligned} \quad (1)$$

где $S(x, y)$ – площадка контакта; F_c и F_b – контактная и неконтактная силы; p – распределение контактного давления; f – коэффициент трения; ρ – расстояние от центра контакта; $\sigma_{ij}^{(c)}$ – напряженное состояние при контакте; $n \perp S$, $\tau \parallel S$, Q, N, M – внутренние поперечное и продольное усилия, а также

внутренний момент; u – перемещения; S_Q, S_N, S_M, S_u – множества точек твердого тела, к которым приложены внешние нагрузки, соответствующие внутренним усилиям, перемещениям.

Напряженное состояние в любой точке $M(x, y, z)$ трибофатической системы определяется из общего соотношения [1, 3]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)} = \left[\sigma_{ij}^{(hs)} \underset{z}{\vee} \sigma_{ij}^{(surf)} \right] + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)} = \\ &= \left[\iint_{S(\xi, \eta)} p(\xi, \eta) G_{ij}^{(B)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta \underset{z}{\vee} \sigma_{ij}^{(S)}(x, y) \right] + \\ &+ \iint_{S(\xi, \eta)} q(\xi, \eta) G_{ij}^{(C)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta + \sigma_{ij}^{(M)}(x, y, z) + \\ &+ \sigma_{ij}^{(N)}(x, y, z) + \sigma_{ij}^{(Q)}(x, y, z), \quad i, j = x, y, z, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\sigma_{ij}^{(n)}, \sigma_{ij}^{(\tau)}, \sigma_{ij}^{(b)}$ – напряжения, вызванные нормальной контактной нагрузкой, касательной контактной нагрузкой, неконтактными нагрузками соответственно, $\sigma_{ij}^{(surf)}$ – напряжения на поверхности полупространства, вызванные действием давления, распределенного по области $S(x, y)$ [3]; $\sigma_{ij}^{(hs)}$ – напряжения под поверхностью полупространства [3]; p – распределение касательных усилий (сила трения); $G_{ij}^{(B)}$ и $G_{ij}^{(C)}$ – функции влияния из фундаментальных решений Буссинеска и Черрути [4, 5].

В общем случае при действии на трибофатическую систему предельной нагрузки F_{*lim} для деформируемого элемента системы определим предельные значения для каждой независимой компоненты тензора $\varphi_{ij}^{(\pm*lim)}$, $i, j = x, y, z$, каждой главной компоненты $\varphi_i^{(\pm*lim)}$, $i = 1, 2, 3$, и интенсивности $\varphi_{int}^{(*lim)}$ [1]:

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}^{(\pm*lim)} &= \text{extr}_{dV} \left[\varphi_{ij}(F_{*lim}, dV) \right], \\ \varphi_i^{(\pm*lim)} &= \text{extr}_{dV} \left[\varphi_i(F_{*lim}, dV) \right], \\ \varphi_{int}^{(*lim)} &= \max_{dV} \left[\varphi_{int}(F_{*lim}, dV) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где $\text{extr}(y) = \begin{cases} \max(y) & \text{при } y \geq 0, \\ \min(y) & \text{при } y < 0. \end{cases}$

По аналогии с (3) для однородного изотропного деформируемого твердого тела определим предельные нормальные и касательные значения $\varphi_n^{(*lim)}$ и $\varphi_\tau^{(*lim)}$ тензора $\varphi_{ij}^{(\pm*lim)}$, а также предельное главное напряжение $\varphi_1^{(*lim)}$ и предельную интенсивность напряжений $\sigma_{int}^{(*lim)}$ [1, 6]:

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(*lim)} &= \max_{dV, i} \left(\left| \varphi_{ii}(F_{*lim}, dV) \right| \right), \quad i = x, y, z, \\ \varphi_\tau^{(*lim)} &= \max_{dV, i, j} \left(\left| \varphi_{ij}(F_{*lim}, dV) \right| \right), \quad i, j = x, y, z, \quad i \neq j, \\ \varphi_1^{(*lim)} &= \max_{dV} \left(\left| \varphi_1(F_{*lim}, dV) \right| \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где dV – элементарный объем нагруженного тела.

Тогда условия для ограничения опасных объемов будут иметь вид

$$\begin{aligned} V_{ij} &= \left\{ dV / \varphi_{ij} \geq \varphi_m^{(*lim)}, dV \subset V_k \right\}, \quad i, j = x, y, z, \quad m = \begin{cases} n & \text{при } i = j, \\ \tau & \text{при } i \neq j, \end{cases} \\ V_i &= \left\{ dV / \varphi_i \geq \varphi_1^{(*lim)}, dV \subset V_k \right\}, \quad i = 1, 2, 3, \\ V_{int} &= \left\{ dV / \varphi_{int} \geq \varphi_{int}^{(*lim)}, dV \subset V_k \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим изменение поврежденности в зависимости от соотношения контактных и неконтактных сил на примере характерной трибофатической системы типа ролик – вал. Контактное взаимодействие ролика и вала сводится к эллиптическому распределению контактного давления по части поверхности вала (рис. 1). Кроме того, вал изгибается неконтактной нагрузкой F_b (см. рис. 1).

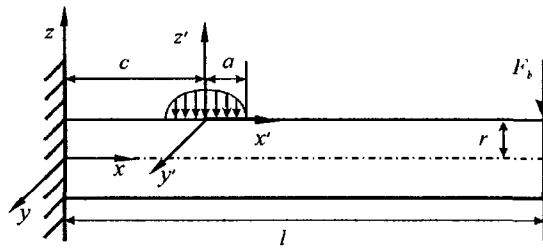


Рис. 1. Расчетная схема системы ролик – вал

Тогда без учета трения граничные условия (1) примут вид

$$\sigma_{zz}^{(c)}|_S = p(F_c, S), \quad \sigma_{ij}^{(c)}|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad Q|_{x=l} = F_b, \quad u_i|_{x=0} = 0,$$

а напряженное состояние системы ролик – вал в соответствии с (2) будет

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(b)} = \left[\iint_{S(\xi, \eta)} p(\xi, \eta) G_{ij}^{(B)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta \nu_z \sigma_{ij}^{(S)}(x, y) \right] + \sigma_{ij}^{(b)}. \quad (6)$$

Описание процедуры расчета $\sigma_{ij}^{(n)}$ при действии нормальной контактной нагрузки можно найти в [1, 3].

Напряженное состояние $\sigma_{ij}^{(b)}$ в (6), вызванное действием силы F_b , определяется в соответствии с известными [8] соотношениями:

$$\sigma_{xx}^{(b)} = \frac{F_b(l-x)z}{4(1+\nu)J}, \quad \sigma_{xz}^{(b)} = \frac{(3+2\nu)F_b}{8(1+\nu)J}(r^2 - z^2), \quad \sigma_{yy}^{(b)} = \sigma_{zz}^{(b)} = \sigma_{xy}^{(b)} = \sigma_{yz}^{(b)} = 0, \quad (7)$$

где $J = \frac{\pi r^4}{64}$, $F_b = 0,4 p_0 \frac{4(1+\nu)J}{lr}$, p_0 – наибольшее контактное давление.

Из (7) видно, что неконтактная нагрузка вызывает изменение σ_{ij} по сравнению с $\sigma_{ij}^{(n)}$ только за счет напряжений $\sigma_{xx}^{(b)}$, $\sigma_{xz}^{(b)}$. Поэтому представляется целесообразным проводить оценку поврежденного состояния системы ролик – вал с помощью опасных объемов V_{xx} , V_{xz} , V_{int} , поскольку другие опасные объемы не изменятся за счет действия F_b . Поскольку в соответствии с (7) $\sigma_{xz}^{(b)}$ не зависит от x , а $\sigma_{xx}^{(n)}|_{x \leq 0} = -\sigma_{xx}^{(n)}|_{x > 0}$ [1], то $\sigma_{xz}^{(n)} \pm \sigma_{xz}^{(b)}$ будет изменяться форма, но не величина опасных объемов V_{xz} и V_{int} .

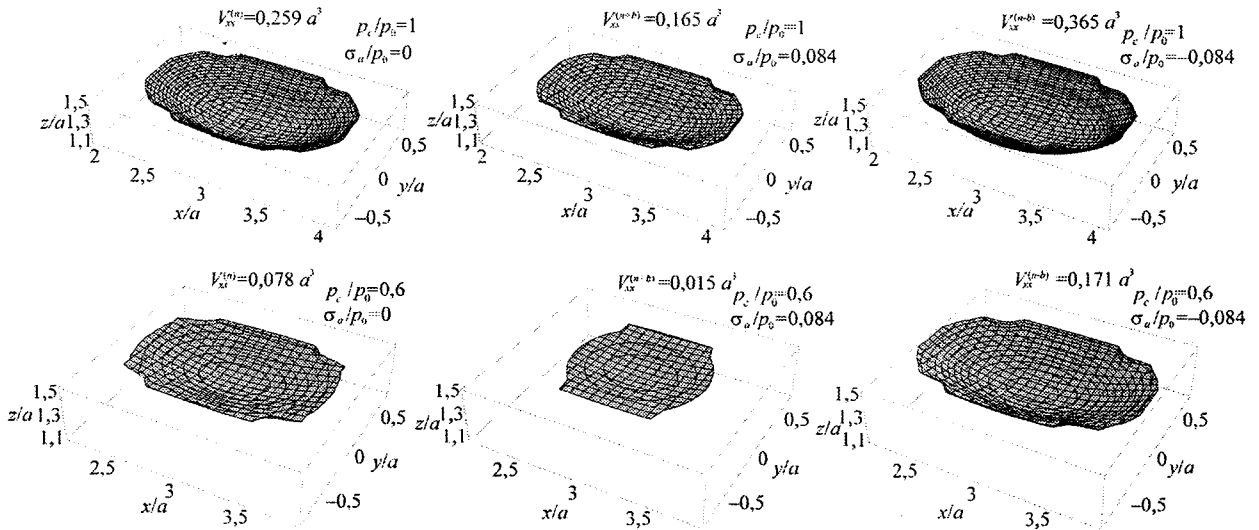


Рис. 2. Опасные объемы V_{xx} для предельного напряжения $\sigma_n^{(lim)} = 0,3 p_0$

Расчет компонентного опасного объема V_{xx} будем проводить на основе (5) методом Монте-Карло:

$$V_{xx} = \iiint_{\sigma_{xx}(x,y,z) > \sigma_n^{(lim)}} dx dy dz,$$

где в соответствии с (4) $\sigma_n^{(lim)} = p_{f\min}$ – нижняя граница рассеяния пределов контактной усталости $p_f = \sigma_{zz}^{(max)}$; $\sigma_{zz}^{(max)}$ – давление в центре контакта при предельной контактной нагрузке.

Результаты расчетов представлены на рис. 2 и 3 при следующих числовых параметрах:

$$p_c = 0,6p_0 \dots p_0, \quad \sigma_a = \sigma_{xx}^{(b)}(c, 0, r) = 0 \dots 0,084p_0, \quad p_{f\min} = 0,3p_0, \quad l = 10a, \quad r = 1,5a,$$

где a – большая полуось эллипса контакта.

Для опасных объемов $V_{xx}^{(n+b)} = V_{xx}(\sigma_{xx}^{(n)} + \sigma_{xx}^{(b)})$ и $V_{xx}^{(n-b)} = V_{xx}(\sigma_{xx}^{(n)} - \sigma_{xx}^{(b)})$ могут быть построены следующие аппроксимирующие функции

$$V_{xx}^{(n+b)} = -0,159 + 0,403p_0 - 0,246\sigma_a,$$

$$V_{xx}^{(n-b)} = -0,202 + 0,456p_0 + 0,35\sigma_a.$$

На основе анализа рис. 2 и 3 можно сделать вывод, что, если контактное взаимодействие, для которого характерны сжимающие напряжения $\sigma_{xx}^{(n)} < 0$, реализуется в области сжатия вала ($\sigma_{xx}^{(b)} < 0$) за счет $F_b > 0$, то для различных p_0 $V_{xx}^{(n-b)}$ может увеличиваться примерно на 50÷150%. В случае, если контактное взаимодействие реализуется в области растяжения вала ($\sigma_{xx}^{(b)} > 0$) за счет $F_b < 0$, то для различных p_0 $V_{xx}^{(n+b)}$ может уменьшаться примерно на 30÷60%.

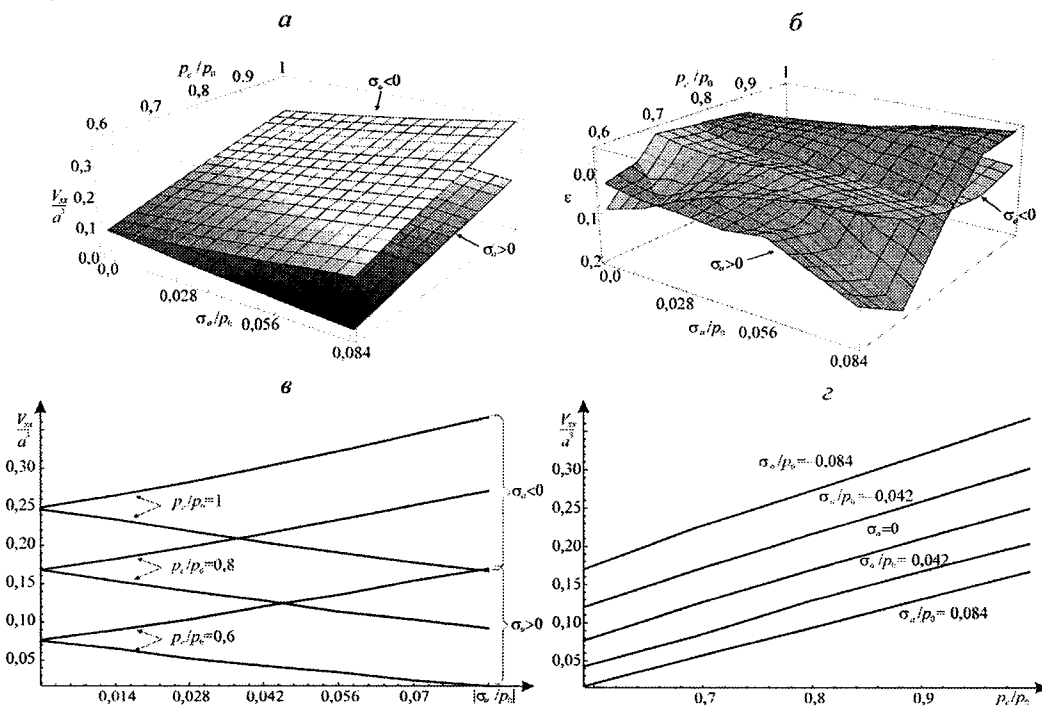


Рис. 3. Зависимость V_{xx} для $\sigma_n^{(lim)} = 0,3p_0$ от напряжений, вызванных контактным и неконтактным нагружением (а); погрешность между расчетными значениями V_{xx} и значениями аппроксимирующих функций (б); зависимость V_{xx} от напряжений, вызванных неконтактным (в) и контактным нагружением (г)

Полученные результаты свидетельствуют о значительном изменении поврежденности (и, следовательно, долговечности) системы, работающей в условиях сложного нагружения, по сравнению с поврежденностью системы, подверженной лишь отдельным видам нагрузки.

1. Сосновский Л. А. Механика износоусталостного повреждения. Гомель, 2007.
2. Сосновский Л. А. Основы трибофатики. Гомель, 2003.
3. Журавков М. А., Щербаков С. С. // Вести НАН Беларуси. Сер. 1. 2008. № 3. С. 60.
4. Журавков М. А. Фундаментальные решения теории упругости и некоторые их применения в геомеханике, механике грунтов и оснований. Мн., 2008.
5. Johnson K. L. Contact Mechanics. Cambridge, 1985.
6. Журавков М. А., Щербаков С. С. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2007. № 1. С. 117.
7. Тимошенко С. П., Гудьер Д. Теория упругости. М., 1975.

Поступила в редакцию 15.01.10.

Сергей Сергеевич Щербаков – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры теоретической и прикладной механики.

Денис Евгеньевич Мармыш – студент 4-го курса механико-математического факультета.