

приведен график изменения радиальных перемещений Δ_r в точках верха и низа поперечного сечения тоннеля по всей его длине в модели.

Расчет показывает неоднородный характер работы тоннеля по длине в зависимости от структуры горного массива и служит иллюстрацией возможностей использования модели для изучения рассматриваемого объекта.

Для дальнейшего развития модели необходим учет специфики передачи горного давления на обделку в зависимости от технологий сооружения обделки, проявления смещений блоков по разломам, изменения

гидростатического давления, температурных и сейсмических воздействий, плотности бетона в результате его коррозии, совместного характера работы пути и обделки.

Литература

1. СНиП 32-04-97. Тоннели железнодорожные и автодорожные / Госстрой России. — М.: ГП ЦПП, 1997. — 19 с.
2. *Зенкевич О. С.* Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. — 542 с.
3. *Пыхалов А. А., Милов А. Е.* / Компрессорная техника и пневматика. 2006. № 2. С. 27 – 35.

УДК 620.178.16:620.178.3:625.03

МЕТОДЫ АНАЛИЗА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ КОЛЕСО/РЕЛЬС

© С. С. Щербаков¹

Статья поступила 26 апреля 2006 г.

Приведена методика расчета напряженного состояния лабораторной модели системы колесо/рельс, построенной по типу ролик/колесо. Показано, что при анализе напряженного состояния систем типа ролик/кольцо, колесо/рельс следует учитывать не только контактную нагрузку, но и изгибные напряжения. Данное положение подтверждено экспериментально.

В механике деформируемого твердого тела контактные задачи представлены отдельным широким направлением исследований [1]. Особый подход к постановке и решению контактных задач развивается в трибофатике [2], где изучается контактное взаимодействие специфических объектов — силовых систем машин и оборудования. Применительно к этим системам требуется комплексный анализ деформирования и повреждения как поверхностного в локальной области контакта двух элементов системы, так и объемного от действующей нагрузки, которая вызывает различные виды общей деформации (изгиб, кручение, растяжение-сжатие, их комбинации и т.д.) хотя бы одного из элементов системы.

В работе [3] предложена общая классификация контактных задач применительно к силовым системам машин. На рис. 1 приведены схемы контакта ролик/ролик (тип контакта *A*) и ролик/кольцо (тип контакта *B*), иллюстрирующие контактные задачи для тел вращения. Тип контакта *B* соответствует простейшей механической модели для системы колесо/рельс, которая предназначена для комплексных износоустойчивых испытаний на машинах серии СИ [2]. Здесь

ролик имитирует колесо, а кольцо — рельс, поэтому эту модель будем называть системой ролик/кольцо.

Система ролик/кольцо отличается от традиционной модели ролик/ролик (см. рис. 1, тип контакта *A*) тем, что полное напряженное состояние кольца в зоне его взаимодействия с роликом обусловлено полем не только контактных напряжений, но и напряжений от изгиба.

В данной работе изложен метод исследования напряженного состояния системы ролик/кольцо.

При изучении системы ролик/кольцо будем учитывать следующее.

Действующая в рассматриваемой силовой системе сила F_N в общем случае вызывает как локальное деформирование ролика и кольца в непосредственной близости точки первоначального контакта, так и деформирование кольца в целом (изгиб). При исследовании напряженного состояния системы будем полагать, что в области контакта сила F_N разделяется на контактную F_c и изгибную F_b составляющие при условии

$$F_N = F_c + F_b. \quad (1)$$

Рассмотрим условие энергетического равновесия твердого тела как равенство энергии деформации и работы, совершенной поверхностными силами, на со-

¹ Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь.

ответствующих перемещениях при отсутствии нагрузки, распределенной по объему твердого тела:

$$\iiint_V T \cdot E dV + \iint_S \bar{F} \bar{u} dS = 0, \quad (2)$$

где $T \cdot E$ — бискалярное произведение тензоров напряжений T и деформаций E ; F и \bar{u} — поверхностные силы и перемещения.

Для определения величин F_c и F_b запишем общую систему уравнений, учитывающую разделение сил и условие энергетического равновесия:

$$\begin{cases} \iiint_V T \cdot E dV + F_N u_N = 0, \\ F_c + F_b = F_N. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь T и E в общем случае являются функциями от F_c и F_b . Решение системы (3) относительно F_c и F_b представляет определенные трудности, поэтому рассмотрим более простой способ определения этих величин.

Соотношение между составляющими F_c и F_b контактной нагрузки F_N в общем случае зависит от объемной жесткости кольца EL_z/l (E — модуль упругости материала кольца, I_z — момент инерции сечения, l — длина дуги бруса от точки приложения контактной нагрузки до ближайшей опоры) или (с точностью до постоянной k) от соотношения определяющих размеров бруса h/l . Следовательно, постоянная k отражает главным образом влияние жесткости материала на формирование составляющих F_c и F_b .

Принимается, что составляющие F_c и F_b описываются экспоненциальным законом

$$F_c = F_N \left[1 - \exp\left(-\frac{h}{lk}\right) \right], \quad F_b = F_N \exp\left(-\frac{h}{lk}\right) \quad (4)$$

с сохранением условия (1). Закон (4) считается справедливым в интервале

$$0 \leq h/lk \leq \infty. \quad (5)$$

Если $l \rightarrow \infty$, то $h/lk = 0$; это означает, что кривой брус трансформируется в брус бесконечной длины, для которого $F_N = F_b$, а $F_c = 0$. Если же $l \rightarrow 0$, то $h/lk = \infty$; это говорит о том, что кольцо стягивается в ролик (или кривой брус — в половину ролика), для которого $F_N = F_c$, а $F_b = 0$.

В силу особенностей геометрии исследуемых взаимодействующих тел конечных размеров ($R_{11} > 0$, $R_{12} > 0$ для ролика и $R_{21} > 0$, $R_{22} > 0$ для кольца) областью их контакта всегда будет эллипс с большой a и малой b полуосями.

Форма и площадь эллипса контакта в исследуемой системе дополнительно определяются изменением главной кривизны кольца вследствие его изгиба:

$$k_{21} = \frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{\rho_M}, \quad (6)$$

где ρ_M — изменение радиуса кривизны, обусловленное изгибом оси кольца.

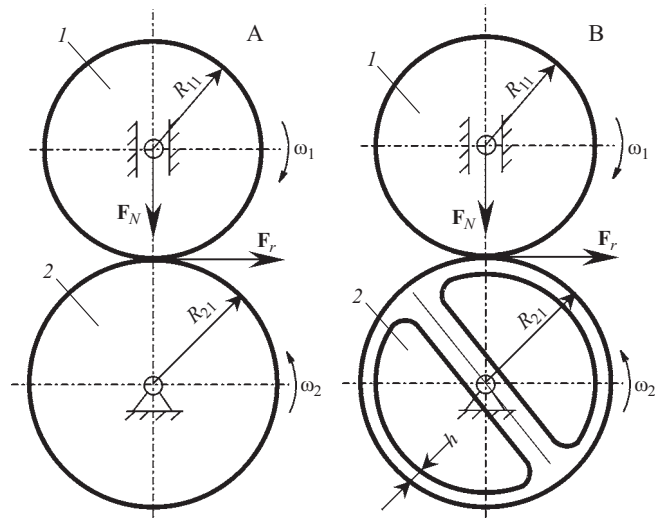


Рис. 1. Схемы контакта ролик/ролик и ролик/кольцо: элемент 1 — $R_{11} > 0$, $R_{12} > 0$; элемент 2 — $R_{21} > 0$, $R_{22} > 0$

С учетом вышеизложенного при заданных геометрии ролика и кольца, а также приложенной нагрузке рассчитаем параметры площадки контакта: величины полуосей эллипса a , b и наибольшего давления p_0 в центре площадки контакта.

В общем случае для расчета параметров эллиптической площадки контакта предварительно определяют геометрический параметр Ω и эксцентриситет эллипса контакта e :

$$\Omega = \frac{1}{\sum k} \times$$

$$\sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{21} - k_{22})^2 + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22})\cos 2\alpha}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} e^2(\Omega) = & 2,667\Omega - 3,577\Omega^2 + 4,244\Omega^3 - 5,871\Omega^4 + \\ & + 10,312\Omega^5 - 18,202\Omega^6 + 24,577\Omega^7 - 21,858\Omega^8 + \\ & + 11,213\Omega^9 - 2,506\Omega^{10}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь k_{ij} ($i, j = 1, 2$) — кривизна соприкасающихся тел: $k_{11} = 1/R_{11}$, $k_{12} = 1/R_{12}$, $k_{21} = 1/R_{21}$, $k_{22} = 1/R_{22}$; $\sum k = k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}$.

Значения полуосей эллипса a , b , наибольшего давления p_0 в центре площадки контакта, сближения осей δ при действии контактной нагрузки F_N определяются по следующим формулам:

$$a = n_a \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\eta F_N}{\sum k}}, \quad b = n_b \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\eta F_N}{\sum k}}, \quad S = \pi ab,$$

$$p_0 = n_p \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{\sum k}{\eta} \right)^2 F_N}, \quad \delta = n_\delta \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \eta^2 \sum k F_N^2}, \quad (9)$$

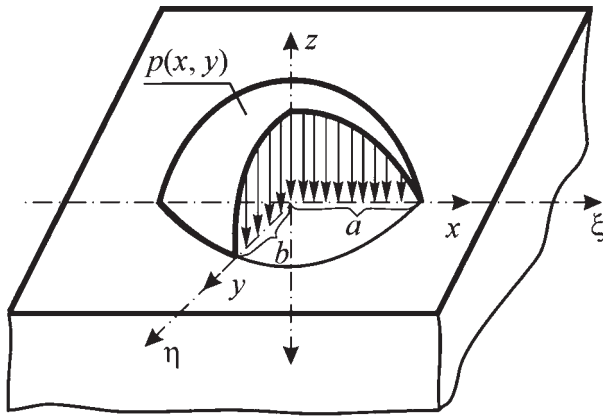


Рис. 2. Схема контактного нагружения

где коэффициенты

$$\begin{aligned} n_a &= \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1-\Omega}{1+\Omega}\right) D(e)}, \\ n_b &= \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1-\Omega}{1+\Omega}\right) [K(e) - D(e)] \sqrt{1-e^2}}, \\ n_p &= \frac{1}{n_a n_b}, \quad n_\delta = K(e) \sqrt[3]{\frac{4}{\pi^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{1-\Omega}{1+\Omega}\right) D(e)}}; \end{aligned} \quad (10)$$

обобщенный параметр свойств материалов

$$\eta = \frac{1-\nu_1}{E_1} + \frac{1-\nu_2}{E_2}; \quad (11)$$

эллиптические интегралы

$$\begin{aligned} K(e) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}, \\ L(e) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \\ D(e) &= \frac{1}{e^2} [K(e) - L(e)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Напряженное состояние в любой точке системы $M(\xi, \eta, z)$ определяется из общего соотношения

$$\sigma_{ij}(\xi, \eta, z) = \sigma_{ij}^{(n)}(\xi, \eta, z) + \sigma_{ij}^{(\tau)}(\xi, \eta, z) + \sigma_{ij}^{(b)}(\xi, \eta, z), \quad (13)$$

где $\sigma_{ij}^{(n)}$ и $\sigma_{ij}^{(\tau)}$ — напряжения, вызванные нормальной и касательной контактными нагрузками, $\sigma_{ij}^{(b)}$ — напряжения, вызванные изгибной нагрузкой.

При исследовании напряженного состояния в зоне контакта обычно ограничиваются нахождением компонент напряжений в точках оси z и некоторых точках поверхности контакта [1]. Определить компоненты напряжения в любой точке полупространства затруднительно из-за сложности интегрируемых функций.

В силовых системах, в которых реализуется процесс трения качения, имеет место несогласованный подвижный контакт между элементами, площадка

контакта которого в общем случае представляет собой эллипс с эллиптически распределенным по ней контактным давлением $p(x, y)$ (рис. 2). В силу подвижности контакта напряженное состояние описывается суперпозицией напряжений, вызванных нормальной $\sigma_{ij}^{(n)}$ ($i, j = x, y, z$) и касательной $\sigma_{ij}^{(\tau)}$ к поверхности контакта нагрузками:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)}. \quad (14)$$

При решении задачи необходимо учесть, что в разных областях контакта (на поверхности и под поверхностью полупространства) применяются различные соотношения для расчета напряжений [1]. Напряжения в любой точке $M(\xi, \eta, 0)$ на поверхности при действии давления, распределенного по эллиптическому закону, рассчитываются по общей формуле

$$\sigma_{ij}^{(surf)}(\xi, \eta, 0) = \sigma_{ij}^{(S)}(\xi, \eta), \quad (15)$$

где $\sigma_{ij}^{(S)}(\xi, \eta)$ — напряжения на поверхности полупространства, вызванные давлением, распределенным по области S , которая описывается соотношением $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$.

В явном виде выражение (15) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}^{(surf)}}{p_0} &= \begin{cases} 2\nu - (1-2\nu) \frac{b}{a+b} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \\ \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \\ 0 \text{ при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1; \end{cases} \\ \frac{\sigma_{yy}^{(surf)}}{p_0} &= \begin{cases} -2\nu - (1-2\nu) \frac{a}{a+b} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \\ \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \\ 0 \text{ при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1; \end{cases} \\ \frac{\sigma_{zz}^{(surf)}}{p_0} &= \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \text{ при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \\ 0 \text{ при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1; \end{cases} \\ \frac{\sigma_{xy}^{(surf)}}{p_0} &= \begin{cases} -(1-2\nu) \frac{b}{ae^2} \left[\frac{y}{ae} \operatorname{arctg} \left(\frac{ex}{a} \right) - \right. \\ \left. - \frac{x}{ae} \operatorname{arctg} \left(\frac{aey}{b^2} \right) \right] = H(x, y) \\ \text{при } H(x, y) < 0, \\ 0 \text{ при } H(x, y) > 0; \end{cases} \\ \frac{\sigma_{xz}^{(surf)}}{p_0} &= \frac{\sigma_{yx}^{(surf)}}{p_0} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, формулу (14) с учетом соотношения (15) можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)} = [\sigma_{ij}^{(hs)} \cup \sigma_{ij}^{surf}] + \sigma_{ij}^{(\tau)}. \quad (17)$$

Напряжения $\sigma_{ij}^{(hs)}$ в любой точке при $z < 0$ полупространства под поверхностью при действии на поверхность эллиптически распределенной нагрузки (см. рис. 2) рассчитываются численными методами с использованием решения задачи Буссинеска $[\sigma_{ij}^{(B)}]$ о действии единичной силы на полупространство [2]:

$$\sigma_{ij}^{(hs)}(\xi, \eta, z) = \iint_{S(x,y)} p(x, y) \sigma_{ij}^{(B)}(x - \xi, y - \eta, z) dx dy. \quad (18)$$

Запишем выражения (18) в явном виде [4 – 6]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(hs)} &= \iint_S \frac{p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \times \\ &\times \left\{ \frac{1-2\nu}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}{r^2} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{z(y-\eta)^2}{\rho^3} \right] - \frac{3z(x-\xi)^2}{\rho^5} \right\} dx dy, \\ \sigma_{yy}^{(hs)} &= \iint_S \frac{p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \times \\ &\times \left\{ \frac{1-2\nu}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{(y-\eta)^2 - (x-\xi)^2}{r^2} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{z(x-\xi)^2}{\rho^3} \right] - \frac{3z(y-\eta)^2}{\rho^5} \right\} dx dy, \\ \sigma_{zz}^{(hs)} &= -\iint_S \frac{3p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \frac{z^3}{\rho^5} dx dy, \\ \sigma_{xy}^{(hs)} &= \iint_S \frac{p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \left\{ \frac{1-2\nu}{r^2} \times \right. \\ &\times \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r^2} - \frac{(x-\xi)(y-\eta)z}{\rho^3} \right] - \right. \\ &\left. - \frac{3(x-\xi)(y-\eta)z}{\rho^5} \right\} dx dy, \\ \sigma_{xz}^{(hs)} &= -\iint_S \frac{3p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \frac{(x-\xi)z^2}{\rho^5} dx dy, \\ \sigma_{yz}^{(hs)} &= -\iint_S \frac{3p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \frac{(y-\eta)z^2}{\rho^5} dx dy, \end{aligned} \quad (19)$$

где $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$; $\rho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2$; $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ — уравнение области S .

При расчете поля напряжений в полупространстве в каждой из рассматриваемых точек $M(\xi, \eta, z)$ вычисляются все двойные интегралы (19). При вычислении каждого из них [3, 4] сначала по формуле Симпсона определяется интеграл по x при фиксированных y , взятых из S с определенным шагом. По полученному набору точек строится аппроксимирующая функция (полином, построенный по методу наименьших квадратов, или кубический сплайн), интегрирование которой дает второй интеграл по y .

В силу того, что задача осесимметрична, расчет следует проводить лишь в 1/4 исследуемой области. Для расчета выбираются точки $M \in X \times Y \times Z$, $X = \{0, \xi_1, \dots, ta\}$, $Y = \{0, \eta_1, \dots, ta\}$, $Z = \{0, z_1, \dots, ta\}$, где t — множитель, определяющий размеры исследуемой области, a — большая полуось эллипса контакта. Расстояние между ближайшими точками $h = ta/n$ (n — количество точек вдоль одной координаты). Чтобы получить как можно более точную картину распределения контактных напряжений, необходимо провести расчет для довольно большого массива точек. Для сокращения расчетного времени целесообразно применять интерполяцию в область между точками основной сетки, в которых значения компонент тензора напряжений получены по описанной выше процедуре. Каждую новую точку будем рассчитывать посередине отрезка, соединяющего две уже имеющиеся точки. Значения напряжений получим с помощью построения кубического сплайна по точкам, где эти значения уже известны, вдоль одного направления, зафиксировав два других. Рассчитанный таким способом массив точек отобразим в три оставшиеся четверти в соответствии с правилами симметрии, присущими каждой из компонент рассматриваемого напряжения. То же сделаем с полученным массивом точек. Таким образом, на основе первоначально рассчитанных $(n \times n \times n) = (n)^3$ будем иметь $(4n \times 4n \times 2n) = 32(n)^3$ точек.

В результате проведенных вычислений и преобразований получим множество $G = \{M_{uvw}(\xi_u, \eta_v, z_w), -ta \leq \xi_u, \eta_v \leq ta, -ta \leq z_w \leq 0\}$, где $u, v = 0, \dots, 2n, w = 0, \dots, n$, в точках которого известны значения напряжений $\sigma_{ij}(\xi_u, \eta_v, z_w)$.

Расчет напряженного состояния, вызванного действием силы трения, также выполняется численными методами с использованием решения задачи для действия единичной касательной силы на полупространство $\sigma_{ij}^{(C)}$ [2]:

$$\sigma_{ij}^{(\tau)}(\xi, \eta, z) = \iint_{S(x,y)} fp(x, y) \sigma_{ij}^{(C)}(x - \xi, y - \eta, z) dx dy, \quad (20)$$

где f — коэффициент трения.

В явном виде выражения (20) будут следующими [3, 4]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}^{(\tau)} &= \iint_S \frac{fp_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \left\{ -\frac{3(x-\xi)^3}{\rho^5} + \right. \\
 &+ (1-2\nu) \left[\frac{x-\xi}{\rho^3} - \frac{3(x-\xi)}{\rho(\rho+z)^2} + \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{(x-\xi)^3}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2(x-\xi)^3}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\} dx dy, \\
 \sigma_{yy}^{(\tau)} &= \iint_S \frac{fp_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \left\{ -\frac{3(x-\xi)(y-\eta)^2}{\rho^5} + \right. \\
 &+ (1-2\nu) \left[\frac{x-\xi}{\rho^3} - \frac{(x-\xi)}{\rho(\rho+z)^2} + \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{(x-\xi)(y-\eta)^2}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2(x-\xi)(y-\eta)^2}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\} dx dy, \\
 \sigma_{zz}^{(\tau)} &= -\iint_S \frac{3fp_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \frac{(x-\xi)z^2}{\rho^5} dx dy, \\
 \sigma_{xy}^{(\tau)} &= \iint_S \frac{fp_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \left\{ -\frac{3(x-\xi)^2(y-\eta)}{\rho^5} + \right. \\
 &+ (1-2\nu) \left[-\frac{(y-\eta)}{\rho(\rho+z)^2} + \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{(x-\xi)^2(y-\eta)}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2(x-\xi)^2(y-\eta)}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\} dx dy, \\
 \sigma_{xz}^{(\tau)} &= -\iint_S \frac{3fp_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \frac{(x-\xi)^2 z}{\rho^5} dx dy, \\
 \sigma_{yz}^{(\tau)} &= -\iint_S \frac{3fp_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \frac{(x-\xi)(y-\eta)z}{\rho^5} dx dy.
 \end{aligned} \tag{21}$$

При качении с проскальзыванием касательная нагрузка для ролика направлена в положительном направлении оси x , а для вала — в отрицательном. Поэтому для расчета напряжений в ролике используются формулы (21), а в вале — выражения (21), умноженные на (-1) .

Двойные интегралы (21) в каждой из рассматриваемых точек $M(\xi, \eta, z)$ вычисляются по схеме, которая применялась для определения интегралов (19). Значения напряжений на множестве G получаются аналогичным образом.

Изгибные напряжения

$$\sigma_{ij}^{(b)} = \sigma_{ij}^{(M)} + \sigma_{ij}^{(N)} + \sigma_{ij}^{(Q)} \tag{22}$$

в кольце определим по формулам для кривого бруса:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy}^{(M)} &= \frac{My}{eF(r_n - y)}, \sigma_{yy}^{(N)} = \frac{N}{F}, \sigma_{yz}^{(Q)} = \frac{QS_y(z)}{b(z)J_y}, \\
 \sigma_{ij}^{(M)} &= \sigma_{ij}^{(N)} = 0, \text{ если } i, j \neq y \text{ и } i \neq j, \\
 \sigma_{ij}^{(Q)} &= 0 \text{ если } i \neq y \text{ и } j \neq z,
 \end{aligned} \tag{23}$$

где $e = R - r_n$ (r_n и R — радиусы нейтральной и средней линий); F — площадь поперечного сечения бруса; J_y — момент инерции бруса; M, N и Q — значения изгибающего момента, продольного и поперечного усилий в рассматриваемой точке бруса, найденные с помощью метода сил.

Объединенное напряженное состояние представляется суперпозицией на множестве G рассчитанных напряжений $\sigma_{ij}^{(surf)}, \sigma_{ij}^{(hs)}, \sigma_{ij}^{(\tau)}, \sigma_{ij}^{(b)}$:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}(\xi_u, \eta_v, z_w) &= \sigma_{ij}^{(n)}(\xi_u, \eta_v, z_w) + \\
 &+ \sigma_{ij}^{(\tau)}(\xi_u, \eta_v, z_w) + \sigma_{ij}^{(b)}(\xi_u, \eta_v, z_w) = \\
 &= [\sigma_{ij}^{(hs)}(\xi_u, \eta_v, z_w) \check{Z} \sigma_{ij}^{(surf)}(\xi_u, \eta_v, 0)] + \\
 &+ \sigma_{ij}^{(\tau)}(\xi_u, \eta_v, z_w) + \sigma_{ij}^{(b)}(\xi_u, \eta_v, z_w) = \\
 &= \left[\iint_{S(x,y)} p(x,y) \sigma_{ij}^{(B)}(x-\xi_u, y-\eta_v, z) dx dy \times \right. \\
 &\quad \left. \times \check{Z} \sigma_{ij}^{(S)}(\xi_u, \eta_v) \right] + \\
 &+ \iint_{S(x,y)} fp(x,y) \sigma_{ij}^{(C)}(x-\xi_u, y-\eta_v, z) dx dy + \\
 &+ \sigma_{ij}^{(M)}(\xi_u, \eta_v, z_w) + \sigma_{ij}^{(N)}(\xi_u, \eta_v, z_w) + \sigma_{ij}^{(Q)}(\xi_u, \eta_v, z_w).
 \end{aligned} \tag{24}$$

На основе объединенных напряжений σ_{ij} (23) определяют компоненты главных напряжений σ_i , $i = 1, 2, 3$, в каждой точке $M(\xi, \eta, z)$ как корни кубического уравнения

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma - I_3 = 0, \tag{25}$$

где инварианты тензора напряжений

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}, \\
 I_2 &= -\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \\
 &\quad - \sigma_{zz}\sigma_{xx} + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2, \\
 I_3 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{zx}^2 - \\
 &\quad - \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2 + 2\sigma_{xy}\sigma_{yz}\sigma_{zx}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Интенсивность напряжений рассчитывают по формуле

$$\sigma_{int} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \tag{27}$$

Приведем пример численного расчета напряженного состояния рассматриваемой силовой системы. Расчет проводился в области $z \in [0; 1,5a]$, $x \in [-1,5a; 1,5a]$, $y \in [-1,5a; 1,5a]$ для $20 \times 39 \times 39$ то-

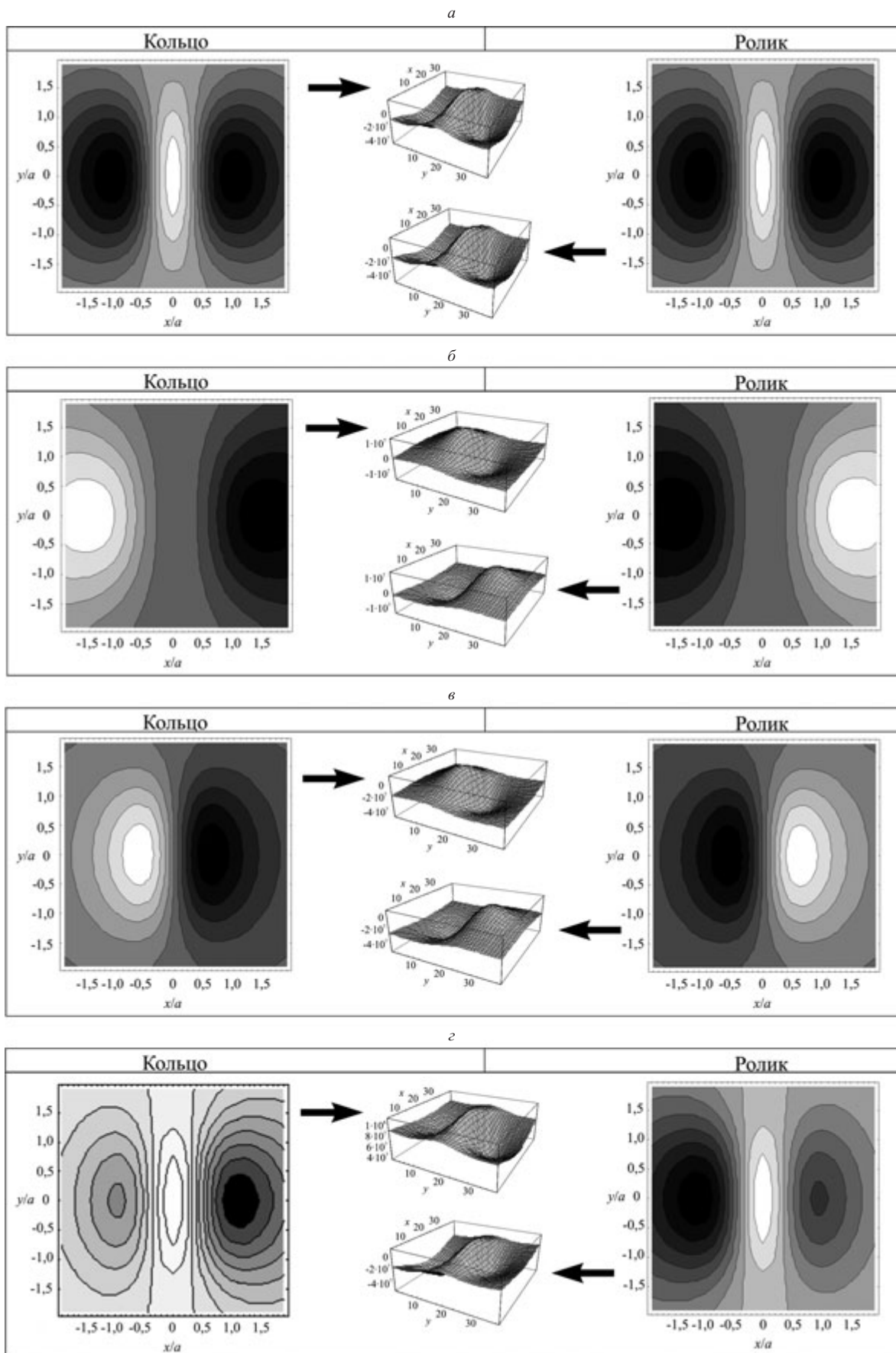


Рис. 3. Распределения компонент тензора напряжений $\sigma_{yy}^{(n)}$ от действия нормальных к поверхности контакта усилий (а), $\sigma_{yy}^{(f)}$ от действия касательных к поверхности контакта усилий (б), $\sigma_{yy}^{(n)} + \sigma_{yy}^{(f)}$ от действия касательных и нормальных к поверхности контакта усилий (в) и $\sigma_{yy}^{(n)} + \sigma_{yy}^{(f)} + \sigma_{yy}^{(b)}$ тензора от действия касательных, нормальных к поверхности контакта и изгибных усилий (г)

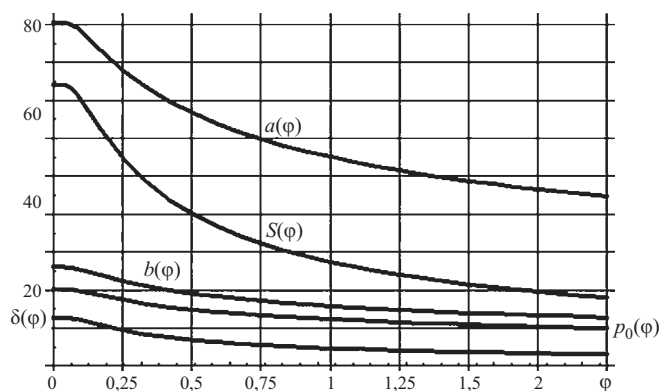


Рис. 4. Зависимости параметров площадки контакта a (10^{-5} м), b (10^{-5} м), δ (10^{-6} м), S (10^{-8} м), p_0 (10^8 Па) от угла поворота кольца при $F_N = 1000$

чек при нагрузке $F_N = 500$ Н. Приняты следующие значения свойств материалов и геометрические характеристики: $E_1 = E_2 = 2,01 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $R_{11} = 0,05$ м; коэффициент трения $f = 0,05$; $R_{12} = 0,005$ м; $R_{21} = 0,015$ м; $R_{22} = \infty$; толщина b и ширина h кольца равны $0,006$ м. Результаты расчетов для $\sigma_{yy}^{(n)}$ (плоскость $z = 0,87a$) приведены на рис. 3.

Видно (см. рис. 3, а), что распределение компоненты $\sigma_{yy}^{(n)}$ в объемной зоне контакта качественно одинаково для ролика и кольца, что соответствует обычному представлению в контактных задачах. Однако обнаружено существенное (до $\sim 30\%$ в условиях расчета) снижение уровня контактных напряжений вследствие влияния изгиба.

Согласно рис. 3, б распределение $\sigma_{yy}^{(n)}$ симметрично относительно оси y . Это соответствует общим представлениям о протекании процессов трения. При этом наблюдается существенное (до $\sim 15\%$) снижение силы трения вследствие влияния изгиба.

Изменение поля напряжения $\sigma_{yy}^{(n)}$ от нормальной контактной нагрузки в элементах системы вследствие влияния силы трения показано на рис. 3, в. Такое изменение имеет специфические черты для каждой из компонент объединенного напряженного состояния, обусловленного контактной нагрузкой.

Из рис. 3, г можно заключить, что влияние изгибных усилий $\sigma_{yy}^{(b)}$ на изменение напряженного состояния кольца состоит в том, что знаки действующих напряжений меняются на противоположные (поле сжимающих напряжений переходит в поле растягиваю-

щих напряжений). В количественном отношении такой переход приводит к изменению величины напряжений примерно до 80 МПа.

Эти выводы аналогичны и для остальных компонент тензора напряжений.

Таким образом, использование формул (13), (15), (18), (20), (22), (24) позволяет получить исчерпывающий анализ напряженного состояния в окрестности эллиптического несогласованного контакта элементов силовой системы.

На рис. 4 приведены зависимости величин параметров контакта a , b , S , δ , p_0 , рассчитанных по формулам (9) с учетом соотношений (1) – (4), от угла поворота φ .

Видно, что в силу перераспределения F_N в соответствии с формулами (1) – (4) и, следовательно, уменьшения составляющей F_c при движении ролика по кольцу от “шпалы” до середины “междушпального пространства” величины параметров площадки контакта уменьшаются примерно в два раза (при заданных условиях).

Таким образом, разработан метод исследования напряженного состояния простейшей модели системы колесо/рельс, построенной по типу ролик/кольцо. В данном методе учтены напряжения, обусловленные как поверхностным, так и объемным деформированием.

Показано, что игнорирование изгибных напряжений может приводить к искаженному представлению о нагруженности элементов системы и, следовательно, к неверной оценке ее работоспособности. Это находится в соответствии с основными положениями трибофатики [1], подтвержденными экспериментально.

Литература

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. — М.: Мир, 1989. — 555 с.
2. Сосновский Л. А. Основы трибофатики. — Гомель: БелГУТ, 2003. Т. 1. — 246 с.; т. 2. — 234 с.
3. Сосновский Л. А. / Современные методы проектирования машин: Сб. науч. тр. Вып. 2. В 7-ми т. / Под общ. ред. П. А. Витязя. — Минск: УП “Технопринт”, 2004. Т. 4. С. 48 – 58.
4. Сосновский Л. А. / Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. — Гомель: БелГУТ, 2005. № 2. С. 18 – 41.
5. Шербаков С. С. / Труды I Международной научно-технической конференции, 4 – 7 октября 2004 г., Тернополь, Украина. — Тернополь: Тернопольский государственный технический университет им. Ивана Пулюя, 2004. С. 400 – 407.
6. Пономарев С. Д. Расчеты на прочность в машиностроении — М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1958. — 1118 с.