

УДК 620.178.16; 620.178.3

Л. А. СОСНОВСКИЙ¹, С. С. ЩЕРБАКОВ²

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ СИЛОВЫХ СИСТЕМ

¹ Белорусский государственный университет транспорта,

² Белорусский государственный университет

(Поступило в редакцию 10.06.2007)

К настоящему времени разработано более 30 теорий предельных (напряженных) состояний деформируемого твердого тела, называемых также теориями прочности [1–4 и др.]. В истории разработки теорий предельных напряженных состояний можно выделить четыре периода [5].

Первый период. Принимается, что предельное состояние материала независимо от того, находится он в линейном или сложном напряженном состоянии, наступает при достижении некоторым механическим параметром φ предельной величины φ_* . Если параметр φ – максимальное нормальное напряжение, то это I теория (Галилей, Лейбниц); если φ – максимальная линейная деформация, то это II теория (Мариотт, Сен-Венан); если φ – максимальное касательное напряжение, то это III теория (Кулон, Треска).

В идейном отношении эти теории аналогичны. Они отличаются лишь тем, что ответственность за достижение предельного состояния приписывают различным параметрам; общим у них является то, что трехмерная характеристика предельного состояния заменяется одномерной – наибольшей.

Второй период отличается созданием принципиально новой теории: предельное состояние материала принимается зависящим от всех компонент тензора напряжений либо от всех трех действующих главных напряжений ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$). Это IV (энергетическая) теория (Бельтрами, Губер, Мизес и Генки).

Однако энергетический подход не дал универсального критерия пластичности. Было установлено, что переход из одного механического состояния в другое зависит и от природы материала. Наступило время *третьего периода*: предельное состояние принимается зависящим от физико-механических свойств материала (Мор). Современные теории предельных состояний, как правило, учитывают свойства материала путем введения в критерий прочности или пластичности соответствующих коэффициентов (m_j), определяемых экспериментально.

Далее обнаружилось, что характеристики свойств материала имеют существенное рассеяние, т. е. вероятностную природу. Начало *четвертому периоду* было положено, по-видимому, А. П. Александровым и С. Н. Журковым; это – *статистические теории прочности*.

Было установлено [4], что подавляющее большинство теорий прочности укладываются в рамки гипотезы Надаи

$$F(\tau_{\text{окт}}, \sigma_{\text{окт}}, m_j) = 0, \quad (1)$$

где октаэдрические касательное и нормальное напряжения

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2},$$

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3);$$

частная форма (1) имеет вид

$$f(\tau, \sigma, m_j) = 0. \quad (1a)$$

Таким образом, построение критериальной теории предельных состояний в конечном счете ведется по единой схеме [5]

$$\begin{array}{l} \sigma_1 \rightarrow \\ \sigma_2 \rightarrow \\ \sigma_3 \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\text{Теория}} \\ \boxed{\text{предельных}} \\ \boxed{\text{состояний}} \end{array} \rightarrow f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, m_j, \dots) = \sigma_{\text{lim}}, \quad (2)$$

где σ_{lim} – соответствующее предельное напряжение: предел прочности σ_b при опасности хрупкого разрушения, предел текучести σ_T при опасности перехода в пластическое состояние, предел выносливости σ_{-1} при опасности усталостного разрушения и т. д.

В работах [6–8] поставлена и решена более общая задача разработки теории предельных состояний не деформируемого твердого тела, а силовой системы, которая находится в коррозионной среде под воздействием контактной, повторно-переменной (внеконтактной) и тепловой нагрузок. Для решения такой сложной задачи применен наиболее общий – энергетический подход. Основные представления, которые положены в основу энергетической теории предельных состояний силовых систем, таковы [6–8].

(1) Зарождение и развитие комплексного повреждения определяются, главным образом, четырьмя частными явлениями: механической усталостью, трением и изнашиванием, тепловыми, электрохимическими (коррозионными) процессами. Эти явления называются частными в том смысле, что каждое из них может быть реализовано как независимое и отдельное, и оно ведет к соответствующему предельному состоянию по частным (отдельным) критериям.

(2) Все эти частные явления и процессы в силовой системе развиваются одновременно и в одной зоне, поэтому предельное состояние системы обусловлено не одним каким-либо из этих явлений, а их совместным (совокупным) действием.

(3) Предельное состояние определяется не всей подводимой к силовой системе энергией U , а лишь ее эффективной (опасной) частью $U^{\text{eff}} \ll U$, которая затрачивается на повреждение.

(4) Критерием предельного состояния служит условие достижения эффективной энергией U^{eff} критической величины U_0 в некоторой области ограниченных размеров элемента силовой системы – в его опасном объеме [5, 6].

(5) Энергия U_0 считается фундаментальной для данного вещества константой; она не должна зависеть от условий испытания, видов подводимой энергии, механизмов повреждения [7, 8].

(6) Эффективная энергия U^{eff} в общем случае может быть представлена функцией трех составляющих: тепловой U_T^{eff} , силовой U_σ^{eff} и фрикционной U_τ^{eff} энергий:

$$U_\Sigma^{\text{eff}} = F_\Lambda (U_T^{\text{eff}}, U_\sigma^{\text{eff}}, U_\tau^{\text{eff}}), \quad (3)$$

где F_Λ учитывает кинетическое взаимодействие частных повреждающих явлений.

(7) Процессы электрохимического (коррозионного) повреждения могут быть учтены как термическая коррозия ($D_{T(ch)}$), коррозия под напряжением ($D_{\sigma(ch)}$) и коррозия трения ($D_{\tau(ch)}$), так что функция (3) принимает вид [8]

$$U_\Sigma^{\text{eff}} = F_\Lambda (U_{T(ch)}^{\text{eff}}, U_{\sigma(ch)}^{\text{eff}}, U_{\tau(ch)}^{\text{eff}}). \quad (3a)$$

В общем случае предельное состояние силовой системы достигается не в результате простого роста эффективных энергий и, следовательно, накопления необратимых повреждений, обусловленных различными воздействиями (нагрузками), а в результате их взаимодействия, направленность которого характеризуется развитием явлений самопроизвольного упрочнения-разупрочнения материала в данных условиях эксплуатации или испытаний [8–10].

Таким образом, гипотезу Сосновского [6, 8, 9] о предельном состоянии силовой системы можно представить в следующем виде:

$$\Phi(U_{\sigma(ch)}^{eff}, U_{\tau(ch)}^{eff}, U_{T(ch)}^{eff}, \Lambda_{i \setminus j}, m_k, U_0) = 0, \quad (4)$$

где m_k , $k=1, 2, \dots$, – некоторые характеристики свойств контактирующих материалов, $\Lambda_{i \setminus j}$ – параметры (функции) взаимодействия необратимых повреждений, обусловленных нагрузками разной природы [9, 10].

Нетрудно видеть: изложенные выше представления не укладываются в гипотезу Надаи (1) или (1a). По существу, они кладут начало очередному – пятому периоду развития теорий прочности, принципиальной особенностью которого является учет взаимодействия необратимых повреждений.

Конкретизация (4) выполнена [6, 7, 9] для того простейшего случая, когда нагрузочными параметрами служат σ , τ_w , T_Σ , D ; σ , τ_w – соответственно циклическое и фрикционное напряжения. Искомый критерий получен [6, 9] в следующем виде:

$$\Lambda_{T \setminus M} \left[\frac{a_T}{1-D_T} T_\Sigma + \Lambda_{\sigma \setminus \tau} \left(\frac{a_\sigma}{1-D_\sigma} \sigma^2 + \frac{a_\tau}{1-D_\tau} \tau_w^2 \right) \right] = U_0. \quad (4a)$$

Методики определения всех параметров, содержащихся в (4), можно найти в литературе [5–9].

Ниже делается попытка построить обобщенный критерий предельного состояния силовой системы

$$\Phi(U_\Sigma^{eff}(T, E, T_\Sigma), m_k, U_0) = 0, \quad (5)$$

где в отличие от (4) примем, что величина эффективной энергии U_Σ^{eff} определяется тензорами напряжений T и деформаций E , а также температурой от всех источников тепла T_Σ . Из (5) следует новый обобщенный критерий предельного состояния [9]

$$U_\Sigma^{eff}(T^{(V, W)}, E^{(V, W)}, T_\Sigma, Ch, \Lambda(V), m_k) = U_0. \quad (6)$$

Здесь тензоры напряжений и деформаций с индексом V обусловлены действием объемных нагрузок (общие случаи трехмерного изгиба, кручения, растяжения-сжатия), а с индексом W обусловлены контактным взаимодействием элементов системы.

Дадим конкретизацию критерия (6).

Для определения эффективной энергии рассмотрим работу внутренних сил в элементарном объеме dV силовой системы. В общем случае дифференциал работы внутренних сил и температуры dT_Σ запишем с учетом правила раскрытия бискалярного произведения тензоров напряжений и деформаций T и dE :

$$dU = T \cdot dE + k dT_\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\varepsilon_{xx} & d\gamma_{xy} & d\gamma_{xz} \\ d\gamma_{yx} & d\varepsilon_{yy} & d\gamma_{yz} \\ d\gamma_{zx} & d\gamma_{zy} & d\varepsilon_{zz} \end{pmatrix} + \quad (7)$$

$$+ k dT_\Sigma = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{xz} d\gamma_{xz} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + k dT_\Sigma.$$

Здесь k – постоянная Больцмана.

Будем исходить из того положения, что в общем случае в соответствии с гипотезой Надаи (1a) определяющую роль в формировании износоусталостного повреждения играют и нормальные, и касательные напряжения, которые обуславливают соответственно процессы сдвига (вследствие трения) и отрыва (вследствие циклического растяжения-сжатия).

В этой связи тензор T целесообразно разделить на две части: T_τ – тензор фрикционно-сдвиговых напряжений, или тензор сдвига, и T_σ – тензор нормальных напряжений (растяжения-сжатия), или тензор отрыва. Итак, в (7) выделим отрывную T_σ и сдвиговую T_τ части тензора T :

$$dU = T \cdot dE + kdT_\Sigma = (T_\sigma + T_\tau) \cdot dE + kdT_\Sigma = T_\sigma \cdot dE + T_\tau \cdot dE + kdT_\Sigma. \quad (8)$$

В соответствии с критерием (6) необходимо следующее представление тензоров T и E :

$$T = T^{(V,W)} = T(T^{(V)}, T^{(W)}), \quad E = E^{(V,W)} = E(E^{(V)}, E^{(W)}). \quad (9)$$

Тогда выражение (8) с учетом (9) можно представить в виде

$$\begin{aligned} dU &= T^{(V,W)} \cdot dE^{(V,W)} + kdT_\Sigma = (T_\sigma^{(V,W)} + T_\tau^{(V,W)}) \cdot dE^{(V,W)} + kdT_\Sigma = \\ &= T_\sigma^{(V,W)} \cdot dE^{(V,W)} + T_\tau^{(V,W)} \cdot dE^{(V,W)} + kdT_\Sigma = dU_\sigma + dU_\tau + dU_T. \end{aligned} \quad (10)$$

В случае линейной зависимости между напряжениями и деформациями формула (9) примет вид

$$\begin{aligned} T = T^{(V,W)} = T^{(V)} + T^{(W)} &= \begin{pmatrix} \sigma_x^{(V)} + \sigma_x^{(W)} & \tau_{xy}^{(V)} + \tau_{xy}^{(W)} & \tau_{xz}^{(V)} + \tau_{xz}^{(W)} \\ \tau_{yx}^{(V)} + \tau_{yx}^{(W)} & \sigma_y^{(V)} + \sigma_y^{(W)} & \tau_{yz}^{(V)} + \tau_{yz}^{(W)} \\ \tau_{zx}^{(V)} + \tau_{zx}^{(W)} & \tau_{zy}^{(V)} + \tau_{zy}^{(W)} & \sigma_z^{(V)} + \sigma_z^{(W)} \end{pmatrix}, \\ E = E^{(V,W)} = E^{(V)} + E^{(W)} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_x^{(V)} + \varepsilon_x^{(W)} & \gamma_{xy}^{(V)} + \gamma_{xy}^{(W)} & \gamma_{xz}^{(V)} + \gamma_{xz}^{(W)} \\ \gamma_{yx}^{(V)} + \gamma_{yx}^{(W)} & \varepsilon_y^{(V)} + \varepsilon_y^{(W)} & \gamma_{yz}^{(V)} + \gamma_{yz}^{(W)} \\ \gamma_{zx}^{(V)} + \gamma_{zx}^{(W)} & \gamma_{zy}^{(V)} + \gamma_{zy}^{(W)} & \varepsilon_z^{(V)} + \varepsilon_z^{(W)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а (10) будет

$$\begin{aligned} dU = U &= \frac{1}{2} T \cdot E + kdT_\Sigma = \frac{1}{2} (T^{(V)} + T^{(W)}) \cdot (E^{(V)} + E^{(W)}) + kdT_\Sigma = \\ &= \frac{1}{2} \left[(T_\sigma^{(V)} + T_\sigma^{(W)}) + (T_\tau^{(V)} + T_\tau^{(W)}) \right] \cdot (E^{(V)} + E^{(W)}) + kdT_\Sigma = \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} \sigma_x^{(V)} + \sigma_x^{(W)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^{(V)} + \sigma_y^{(W)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^{(V)} + \sigma_z^{(W)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \tau_{xy}^{(V)} + \tau_{xy}^{(W)} & \tau_{xz}^{(V)} + \tau_{xz}^{(W)} \\ \tau_{yx}^{(V)} + \tau_{yx}^{(W)} & 0 & \tau_{yz}^{(V)} + \tau_{yz}^{(W)} \\ \tau_{zx}^{(V)} + \tau_{zx}^{(W)} & \tau_{zy}^{(V)} + \tau_{zy}^{(W)} & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x^{(V)} + \varepsilon_x^{(W)} & \gamma_{xy}^{(V)} + \gamma_{xy}^{(W)} & \gamma_{xz}^{(V)} + \gamma_{xz}^{(W)} \\ \gamma_{yx}^{(V)} + \gamma_{yx}^{(W)} & \varepsilon_y^{(V)} + \varepsilon_y^{(W)} & \gamma_{yz}^{(V)} + \gamma_{yz}^{(W)} \\ \gamma_{zx}^{(V)} + \gamma_{zx}^{(W)} & \gamma_{zy}^{(V)} + \gamma_{zy}^{(W)} & \varepsilon_z^{(V)} + \varepsilon_z^{(W)} \end{pmatrix} + kdT_\Sigma. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) видно, что отрывная часть T_σ тензора T представляет собой сумму отрывных частей тензоров при объемном деформировании $T_\sigma^{(V)}$ и поверхностном нагружении (трении) $T_\sigma^{(W)}$, а сдвиговая T_τ – сумму сдвиговых частей $T_\tau^{(V)}$ и $T_\tau^{(W)}$. В этом и состоит принципиальное отличие обобщенного подхода к построению критерия предельного состояния: в основном критерии

(4а) величины σ и τ_w характеризуют только объемное и только поверхностное деформирование соответственно.

Из общей энергии (10) выделим ее эффективную часть в соответствии с методикой, принятой при формализации (4). Для этого введем коэффициенты $A_\sigma(V)$, $A_\tau(V)$ и $A_T(V)$ соответствующей размерности, которые определяют долю поглощенной энергии,

$$dU_\Sigma^{eff} = \Lambda_{M\setminus T}(V) \left\{ \Lambda_{\tau\setminus\sigma}(V) \left[A_\sigma(V) T_\sigma \cdot dE + A_\tau(V) T_\tau \cdot dE \right] + A_T(V) k dT_\Sigma \right\}, \quad (12)$$

или

$$dU_\Sigma^{eff} = \Lambda_{M\setminus T}(V) \left\{ \Lambda_{\tau\setminus\sigma}(V) \left[A_\sigma(V) dU_\sigma + A_\tau(V) dU_\tau \right] + A_T(V) dU_T \right\}, \quad (12a)$$

где $\Lambda_{\tau\setminus\sigma}(V)$, $\Lambda_{M\setminus T}(V)$ – функции взаимодействия между энергиями различной природы.

То, что коэффициенты A могут быть, вообще говоря, различными для разных точек объема V , позволяет учитывать неоднородность среды.

Критерий (6) с учетом (12а) примет вид

$$\Lambda_{M\setminus T}(V) \left\{ \Lambda_{\tau\setminus\sigma}(V) \left[dU_\sigma^{eff} + dU_\tau^{eff} \right] + dU_T^{eff} \right\} = U_0. \quad (13)$$

В случае линейной зависимости между напряжениями и деформациями выражения (12), (12а) и (13) будут соответственно

$$U_\Sigma^{eff} = \Lambda_{M\setminus T}(V) \left\{ \Lambda_{\tau\setminus\sigma}(V) \left[\frac{1}{2} A_\sigma(V) T_\sigma \cdot E + \frac{1}{2} A_\tau(V) T_\tau \cdot E \right] + A_T(V) k T_\Sigma \right\}, \quad (14)$$

или

$$\begin{aligned} U_\Sigma^{eff} &= \Lambda_{M\setminus T}(V) \left\{ \Lambda_{\tau\setminus\sigma}(V) \left[A_\sigma(V) U_\sigma(V) + A_\tau(V) U_\tau(V) \right] + A_T(V) U_T(V) \right\} = \\ &= \Lambda_{M\setminus T}(V) \left\{ \Lambda_{\tau\setminus\sigma}(V) \left[U_\sigma^{eff}(V) + U_\tau^{eff}(V) \right] + U_T^{eff}(V) \right\} = U_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим частный случай, когда $A_\sigma(V) = A_\sigma = \text{const}$, $A_\tau(V) = A_\tau = \text{const}$, $A_T(V) = A_T = \text{const}$, $\Lambda_{\tau\setminus\sigma}(V) = \Lambda_{\tau\setminus\sigma} = \text{const}$, $\Lambda_{M\setminus T}(V) = \Lambda_{M\setminus T} = \text{const}$.

В таком случае напряженное состояние, во-первых, обусловлено объемным деформированием, для которого можно пренебречь всеми компонентами тензора напряжений, кроме одного σ (одномерное растяжение-сжатие, плоский чистый изгиб). Во-вторых, напряженное состояние обусловлено поверхностным трением, для которого можно пренебречь всеми компонентами тензора напряжений, кроме одного τ . Тогда (13) примет вид (4а)

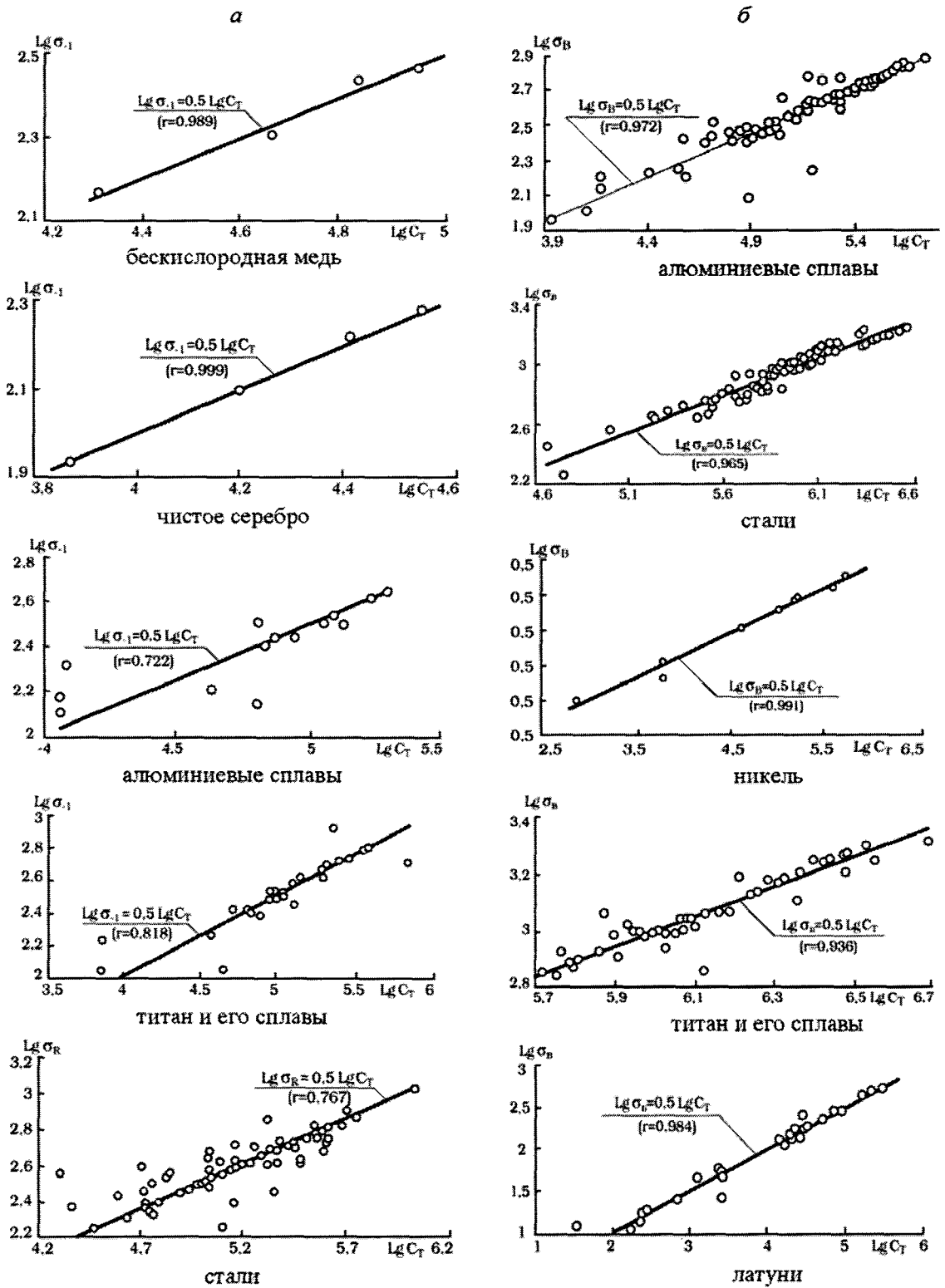
$$\Lambda_{M\setminus T} \left[\Lambda_{\tau\setminus\sigma} \left(A_\sigma \sigma^2 + A_\tau \tau^2 \right) + A_T T_\Sigma \right] = U_0,$$

$$\text{где } A_\sigma = \frac{a_\sigma}{1 - D_\sigma}, \quad A_\tau = \frac{a_\tau}{1 - D_\tau}, \quad A_T = \frac{a_T}{1 - D_T}.$$

Таким образом, критерии (13) и (15) и есть решения задачи (5) на основе энергетического условия (6). А уравнение (4а) есть их простейший частный случай. Содержание всех форм критерия едино: предельное состояние силовой системы наступит, когда сумма взаимодействующих эффективных составляющих энергии от силового, термического и фрикционного нагружения (с учетом процессов коррозии под напряжением, термической и трибохимической коррозии) достигнет критической величины – энергии разрыва межатомной связи (начальной энергии активации процесса разрушения).

На основании изложенного критерий (6) можно представить следующим образом:

$$U_\Sigma^{eff} = \left\{ \left[U_\sigma^{eff}(T_\sigma^{(V,W)}, E_\sigma^{(V,W)}) + U_\tau^{eff}(T_\tau^{(V,W)}, E_\tau^{(V,W)}) \right] \Lambda_{\sigma\setminus\tau} + U_T^{eff} \right\} \Lambda_{T\setminus M} = U_0, \quad (16)$$



Зависимости $\sigma_1(C_T)$ (а) и $\sigma_B(C_T)$ (б) для различных материалов

или в терминах повреждений

$$\omega_{\Sigma}^{eff} = \frac{U_{\Sigma}^{eff}}{U_0} = 1, \quad (17)$$

где комплексная энергетическая мера поврежденности изменяется в интервале

$$0 \leq \omega_{\Sigma}^{eff} \leq 1. \quad (18)$$

В заключение дадим подтверждение практической работоспособности энергетического критерия предельных состояний силовых систем на примере зависимости предельных напряжений σ_{-1T} от параметра C_T термодинамического сопротивления материалов

$$\lg \sigma_{-1T} = \frac{1}{2} \lg C_T, \quad C_T = \frac{U_0 / \Lambda_{T \setminus M} - a_T T_{\Sigma}}{a_{\sigma}}. \quad (19)$$

Формула (19) следует из (4а) при $D = 0$ и $\sigma = \sigma_{-1T}$. Проверка (19) выполнена для материалов разных классов по результатам соответствующих экспериментальных исследований многих авторов и представлена на рисунке; в работе [7] можно найти анализ литературных источников. Из рисунка видно, что коэффициент корреляции очень высок ($r \geq 0,722$). В большинстве случаев r больше 0,9 для анализа, включающего более 300 результатов испытаний. В работах [6, 7] изложены и другие примеры экспериментальной проверки критерия (4). Это позволяет надеяться, что и более общие критерии (13) и (15) окажутся практически приемлемыми. Дальнейшие исследования должны, по нашему мнению, подтвердить такие ожидания.

Литература

1. Писаренко Г. С., Лебедев А. А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев, 1976.
2. Трощенко В. Т., Красовский А. Я., Покровский В. В. и др. Сопротивление материалов деформированию и разрушению. Киев, 1993. Ч. 1. 288 с. Ч. 2. 702 с.
3. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев, 1975.
4. Прочность материалов и конструкций. Киев, 2005.
5. Сосновский Л. А. Статистическая механика усталостного разрушения. Мн., 1987.
6. Сосновский Л. А. // Проблемы прочности. 2003. № 5. С. 36–49.
7. Сосновский Л. А., Богданович А. В. Теория накопления износоусталостных повреждений / Под ред. Н. А. Махутова. Гомель, 2000.
8. Sosnovskiy L. A. Tribo-Fatigue. Wear-fatigue damage and its prediction (Foundations of engineering mechanics). Springer, 2005.
9. Сосновский Л. А. Механика износоусталостного повреждения. Гомель, 2007.
10. Сосновский Л. А. Риск. Механотермодинамика необратимых повреждений. Гомель, 2004.

L. A. SOSNOVSKIY, S. S. SHERBAKOV

GENERALIZED THEORY OF LIMIT STATES OF ACTIVE SYSTEMS

Summary

The generalized criterion of a limit states of an active system is offered. The experimental check has shown its practical acceptability.