

МАШИНОСТРОЕНИЕ, МЕХАНИКА

УДК 539.3

С. С. ЩЕРБАКОВ

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СИСТЕМЫ ДИСК-ЦИЛИНДР  
В УСЛОВИЯХ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ИЗГИБА ЦИЛИНДРА

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 29.01.2009)

**Постановка задачи.** Для исследуемых в трибофатике силовых систем [1, 2], характерно наличие как контактного взаимодействия между их элементами, так и объемного деформирования, вызванного действием неконтактных нагрузок.

Рассмотрим напряженное состояние системы ролик-вал (диск-цилиндр) (рис. 1), используемой при износоусталостных испытаниях [1, 2]. В данной силовой системе взаимодействующие тела в области контакта ограничены поверхностями второго порядка, поэтому для описания контактного взаимодействия применима теория контакта Герца [3–5]. В соответствии с этой теорией принимается, что площадка контакта  $S(x, y)$  имеет форму эллипса с большой  $a$  и малой  $b$  полуосями, давление  $p(S)$  на площадке контакта распределено по эллиптическому закону [3–5]. Таким образом, трехмерное напряженно-деформированное состояние для случая эллиптического контакта с трением определяется для граничных условий следующего вида:

$$\sigma_{mn}^{(c)} \Big|_S = p(F_c, S), \quad \sigma_{nt}^{(c)} \Big|_S = fp(F_c, S), \quad \sigma_{ij}^{(c)} \Big|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad \text{и } i, j = x, y, z, \quad (1)$$

где  $S(x, y)$  – площадка контакта,  $F_c$  – контактная сила,  $f$  – коэффициент трения,  $\rho$  – расстояние от центра контакта,  $\sigma_{ij}^{(c)}$  – напряженное состояние при контакте,  $\mathbf{n} \perp S$ ,  $\mathbf{\tau} \parallel S$ .

Кроме того, консольно закрепленный цилиндр изгибается неконтактной силой  $F_b$  (рис. 1):

$$Q_l^I = F_b, \quad (2)$$

где  $Q$  – внутреннее поперечное усилие,  $l$  – длина цилиндра.

Особенность напряженного состояния системы диск-цилиндр состоит в том, что если напряженное состояние диска является чисто контактным, то в цилиндре помимо контактных напряжений также действуют напряжения, обусловленные изгибающей силой  $F_b$  (изгиб от действия контактной нагрузки  $F_c$  учитывать не будем).

**Напряженное состояние при контакте.** При исследовании напряженного состо-

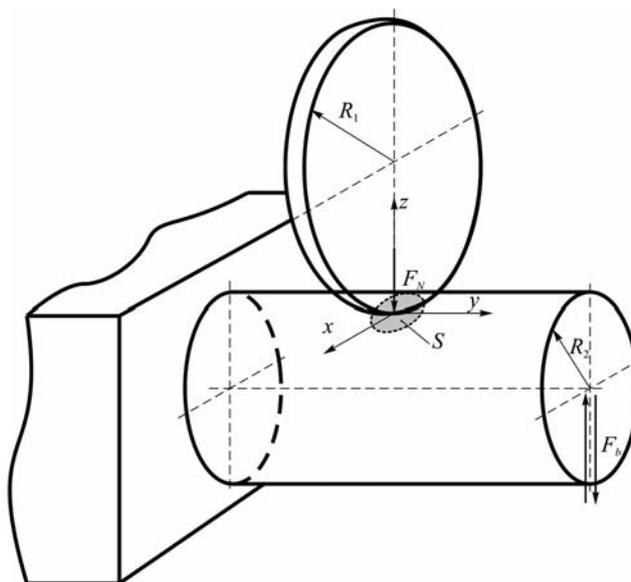


Рис. 1. Схема системы диск-цилиндр

яния в зоне контакта в точной постановке обычно ограничиваются нахождением компонентов напряжений в точках оси  $z$  и в некоторых точках поверхности контакта [3–5 и др.]. Определение всех компонентов напряжения в любой точке полупространства в точной постановке затруднительно в силу большой сложности интегрируемых функций.

В силовой системе с учетом трения соприкасающихся тел имеет место несогласованный подвижный контакт между элементами. В общем случае по площадке контакта распределены нормальные  $p(x, y)$  и касательные  $q(x, y)$  к поверхности контакта усилия. Напряженное состояние в области контакта  $\sigma_{ij}$  представим как суперпозицию напряженных состояний  $\sigma_{ij}^{(n)}$  и  $\sigma_{ij}^{(\tau)}$ , обусловленных соответственно нагрузками  $p(x, y)$  и  $q(x, y)$ :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)}. \quad (3)$$

Расчет напряжений  $\sigma_{ij}^{(hs)}$  в любой точке  $M(x, y, z)$  полупространства для  $z < 0$  при действии на поверхность нормальных усилий  $p(x, y)$  проводится численными методами с использованием функций влияния  $G_{ij}^{(B)}$  из фундаментального решения задачи Буссинеска  $\sigma_{ij}^{(B)}$  о действии сосредоточенной нормальной силы на полупространство [6, 7]:

$$\sigma_{ij}^{(hs)}(x, y, z) = \iint_{S(\xi, \eta)} p(\xi, \eta) G_{ij}^{(B)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta, \quad (4)$$

где  $p(\xi, \eta) = p_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}$ ,  $\left\{ (\xi, \eta) / \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ .

Решение Бусинеска в соответствии с [3, 4] имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(B)} &= \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[ \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{x^2 - y^2 + zy^2}{r^2} + \frac{3zx^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zx^2}{\rho^5} \right\}, \\ \sigma_{yy}^{(B)} &= \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[ \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{y^2 - x^2 + zx^2}{r^2} + \frac{3zy^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zy^2}{\rho^5} \right\}, \\ \sigma_{zz}^{(B)} &= -\frac{3Pz^3}{2\pi\rho^5}, \quad \sigma_{xy}^{(B)} = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[ \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{xy}{r^2} - \frac{xyz}{\rho^3} \right] - \frac{3xyz}{\rho^5} \right\}, \\ \sigma_{xz}^{(B)} &= -\frac{3Pxz^2}{2\pi\rho^5}, \quad \sigma_{yz}^{(B)} = -\frac{3Pyz^2}{2\pi\rho^5}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

Необходимо учесть, что на поверхности полупространства упругие напряжения  $\sigma_{ij}^{(hs)}$  не определены. Это обусловлено тем, что для точек  $z = 0$  поверхности полупространства интегралы из (4) не сходятся в силу особенности в точке приложения единичной нагрузки.

Расчет напряжений в любой точке  $M(x, y, 0)$  поверхности полупространства при действии нормально распределенных усилий  $p(x, y)$  проводится в соответствии со следующей общей формулой [2, 6]:

$$\sigma_{ij}^{(surf)}(x, y, 0) = \sigma_{ij}^{(S)}(x, y), \quad (6)$$

где  $\sigma_{ij}^{(S)}(x, y)$  – напряжения на поверхности полупространства, вызванные действием давления, распределенного по области  $S(x, y)$ .

В явном виде выражения (6) на основании [3–6] следующие:

$$\frac{\sigma_{xx}^{(surf)}}{p_0} = \begin{cases} -\frac{b+2\nu a}{a+b} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \\ 0 & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1, \end{cases}$$

$$\frac{\sigma_{yy}^{(surf)}}{P_0} = \begin{cases} -\frac{a+2\nu b}{a+b} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \\ 0 & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1, \end{cases}$$

$$\frac{\sigma_{zz}^{(surf)}}{P_0} = \begin{cases} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \\ 0 & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1, \end{cases} \quad (7)$$

$$\frac{\sigma_{xy}^{(surf)}}{P_0} = \begin{cases} -(1-2\nu) \frac{b}{ae^2} \left[ \frac{y}{ae} \operatorname{arth} \left( \frac{ex}{a} \right) - \frac{x}{ae} \operatorname{arctg} \left( \frac{aey}{b^2} \right) \right] = H(x, y) & \text{при } H(x, y) < 0, \\ 0 & \text{при } H(x, y) > 0, \end{cases}$$

$$\frac{\sigma_{xz}^{(surf)}}{P_0} = 0, \quad \frac{\sigma_{yx}^{(surf)}}{P_0} = 0.$$

Таким образом, напряжения  $\sigma_{ij}^{(n)}$  в формуле (3) с учетом (4) – (7) можно представить в таком виде:

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \sigma_{ij}^{(hs)} & \text{при } z < 0, \\ \sigma_{ij}^{(surf)} & \text{при } z = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Расчет напряженного состояния  $\sigma_{ij}^{(\tau)}$ , вызванного действием силы трения, которая моделируется распределением касательных усилий  $q(x, y)$ , также выполняется численными методами с использованием функций влияния  $G_{ij}^{(C)}$  из решения задачи Черрути  $\sigma_{ij}^{(C)}$  для действия сосредоточенной касательной силы на полупространство [6, 7]:

$$\sigma_{ij}^{(\tau)}(x, y, z) = \iint_{S(\xi, \eta)} q(\xi, \eta) G_{ij}^{(C)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta, \quad (9)$$

где  $q(\xi, \eta) = q_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}$ .

Решение задачи о действии сосредоточенной касательной силы  $Q_x$  (направленной вдоль оси  $x$ ) на поверхность полупространства имеет следующий явный вид [3, 4]:

$$\sigma_{xx}^{(C)} = \frac{Q_x}{2\pi} \left\{ -\frac{3x^3}{\rho^5} + (1-2\nu) \left[ \frac{x}{\rho^3} - \frac{3x}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{x^3}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2x^3}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\},$$

$$\sigma_{yy}^{(C)} = \frac{Q_x}{2\pi} \left\{ -\frac{3xy^2}{\rho^5} + (1-2\nu) \left[ \frac{x}{\rho^3} - \frac{x}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{xy^2}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2xy^2}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\},$$

$$\sigma_{zz}^{(C)} = -\frac{3Q_x}{2\pi} \frac{xz^2}{\rho^5}, \quad (10)$$

$$\sigma_{xy}^{(C)} = \frac{Q_x}{2\pi} \left\{ -\frac{3x^2y}{\rho^5} + (1-2\nu) \left[ -\frac{y}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{x^2y}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2x^2y}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\},$$

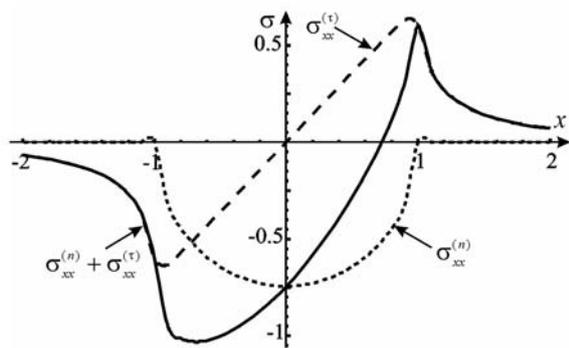


Рис. 2. Распределение напряжений  $\sigma_{xx}$  на поверхности контакта при  $z = 0, y = 0$

$$\sigma_{xz}^{(C)} = -\frac{3Q_x}{2\pi} \frac{x^2 z}{\rho^5}, \quad \sigma_{yz}^{(C)} = -\frac{3Q_x}{2\pi} \frac{xyz}{\rho^5},$$

где  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

Формула (3) с учетом (8) примет вид

$$\sigma_{ij} = \left[ \sigma_{ij}^{(hs)} \vee_z \sigma_{ij}^{(surf)} \right] + \sigma_{ij}^{(\tau)}. \quad (11)$$

На рис. 2, 3 в соответствии с (11) представлены распределения нормальных и касательных напряжений, отнесенных к  $p_0$ , при действии эллиптически распределенных нормальных

$p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}$  и касательных

$q(x, y) = fp_0(x, y)$  контактных усилий (коэффициент трения  $f = 0,5$ ,  $b/a = 0,5$ ). Из рисунков видно значительное отличие распределений  $\sigma_{xx}^{(n)} + \sigma_{xx}^{(\tau)}$  и  $\sigma_{xz}^{(n)} + \sigma_{xz}^{(\tau)}$  от распределений  $\sigma_{xx}^{(n)}$  и  $\sigma_{xz}^{(n)}$  за счет действия силы трения, вызывающей появление знакопеременных напряжений  $\sigma_{xx}^{(\tau)}$  и  $\sigma_{xz}^{(\tau)}$ .

**Объединенное напряженное состояние с учетом неконтактного изгиба.** Напряженное состояние, вызванное действием силы  $F_b$  в плоскости  $y = 0$  (рис.1), определяется в соответствии с известными соотношениями [8, 9]:

$$\sigma_{xx}^{(b)} = \frac{F_b(12r-x)z}{4(1+\nu)J}, \quad \sigma_{xz}^{(b)} = \frac{(3+2\nu)F_b}{8(1+\nu)J}(r^2 - z^2), \quad \sigma_{yy}^{(b)} = \sigma_{zz}^{(b)} = \sigma_{xy}^{(b)} = 0, \quad (12)$$

где  $J = \frac{\pi R_2^4}{64}$ ,  $F_b = 0,4p_0 \frac{4(1+\nu)J}{12r^2}$ .

Объединенное напряженное состояние, определяемое выражением с учетом (8) и (12), имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)} = \left[ \sigma_{ij}^{(hs)} \vee_z \sigma_{ij}^{(surf)} \right] + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)} = \\ &= \left[ \iint_{S(\xi, \eta)} p(\xi, \eta) \sigma_{ij}^{(B)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta \vee_z \sigma_{ij}^{(S)}(x, y) \right] + \\ &+ \iint_{S(\xi, \eta)} q(\xi, \eta) \sigma_{ij}^{(C)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta + \sigma_{ij}^{(M)}(x, y, z) + \\ &+ \sigma_{ij}^{(N)}(x, y, z) + \sigma_{ij}^{(O)}(x, y, z). \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку формула (13) строится как суперпозиция компонент  $(\sigma_{ij}^{(n)}, \sigma_{ij}^{(\tau)}, \sigma_{ij}^{(b)})$  напряжения, то имеется возможность анализа как общего, так и любого из частных случаев.

Рассмотрим, например, объединенное напряженное состояние вида

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(b)}. \quad (14)$$

Типичные примеры изменения поля локальных напряжений (деформаций), когда на него накладывается поле напряжений (деформаций), обусловленных объемным деформированием, представлены на рис. 4.

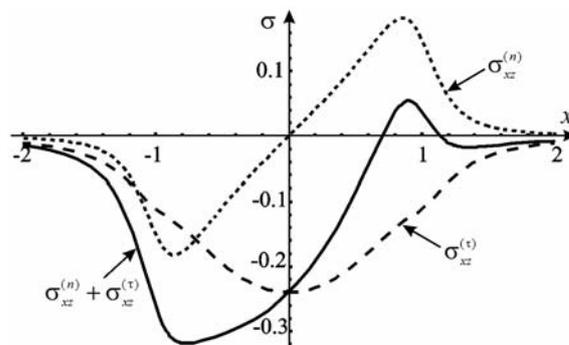


Рис. 3. Распределение напряжений  $\sigma_{xz}$  под поверхностью контакта при  $z = -0,3 a, y = 0$

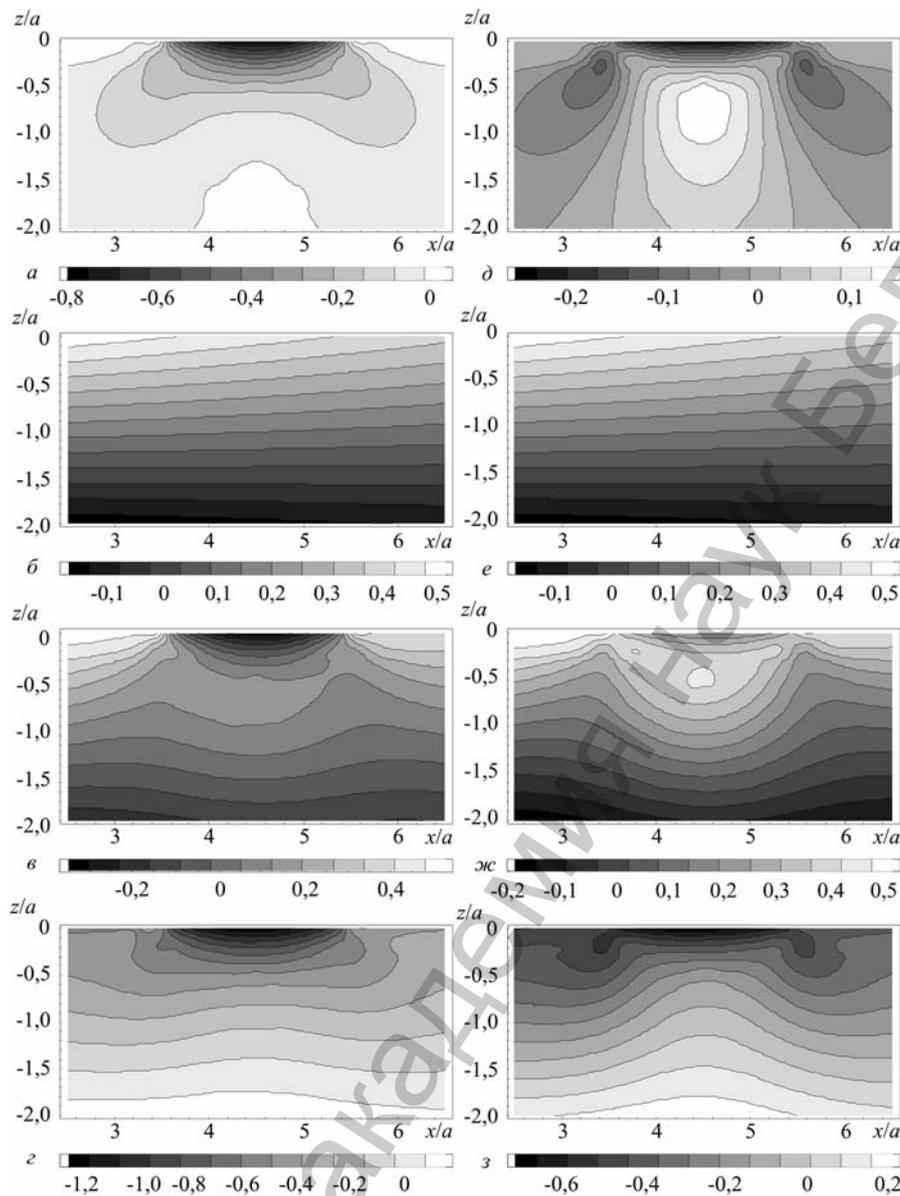


Рис. 4. Распределения напряжений  $\sigma_{xx}^{(n)}$  (а),  $\sigma_{xx}^{(b)}$  (б),  $\sigma_{xx}^{(n)} + \sigma_{xx}^{(b)}$  ( $F_b > 0$ ) (в),  $\sigma_{xx}^{(n)} - \sigma_{xx}^{(b)}$  ( $F_b < 0$ ) (г), отнесенных к  $p_0$ , и деформаций  $\varepsilon_{xx}^{(n)}$  (д),  $\varepsilon_{xx}^{(b)}$  (е),  $\varepsilon_{xx}^{(n)} + \varepsilon_{xx}^{(b)}$  ( $F_b > 0$ ) (ж),  $\varepsilon_{xx}^{(n)} - \varepsilon_{xx}^{(b)}$  ( $F_b < 0$ ) (з), отнесенных к  $p_0/E$  ( $E$  – модуль упругости), в окрестности контакта в плоскости  $y=0$  при  $a/b=0,5$

Из рис. 4, в видно, что хотя при  $F_b < 0$  на верхней поверхности цилиндра напряжения  $\sigma_{xx}^{(b)} > 0$ , однако в результате действия контактных сжимающих напряжений  $\sigma_{xx}^{(n)}$  объединенные напряжения  $\sigma_{xx}^{(n)} < \sigma_{xx}^{(n)} + \sigma_{xx}^{(b)} < 0$ . Таким образом, с одной стороны, приводящие к образованию магистральной трещины растягивающие напряжения  $\sigma_{xx}^{(b)}$  компенсируются сжимающими напряжениями  $\sigma_{xx}^{(n)}$ . С другой стороны, уровень сжимающих напряжений  $\sigma_{xx}^{(n)}$  понижается за счет изгиба.

Из рис. 4, г видно, что при  $F_b > 0$  суперпозиция напряжений  $\sigma_{xx}^{(b)} < 0$  и  $\sigma_{xx}^{(n)} < 0$  приводит к значительному (до 50 %) увеличению сжимающих напряжений в окрестности точки первоначального контакта.

Представленные на рис. 4 распределения напряжений свидетельствуют о весьма значительном влиянии неконтактной нагрузки на напряженное состояние в окрестности контакта.

## Литература

1. Sosnovskiy L. A. *Tribo-Fatigue. Wear-fatigue damage and its prediction (Foundations of engineering mechanics)*. Springer, 2004.
2. Сосновский Л. А. *Механика износоусталостного повреждения*. Гомель, 2007.
3. Johnson K. L. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985.
4. *Modern Tribology Handbook*. CRC Press, 2000.
5. Горячева И. Г. *Механика фрикционного взаимодействия*. М., 2001.
6. Журавков М. А., Щербakov С. С. // *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук*. 2008. № 3. С. 60–64.
7. Щербakov С. С. X // *Белорусская матем. конф.: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Мн., 2008. Часть 2*. С. 152.
8. Тимошенко С. П., Гудьер Д. *Теория упругости*. М., 1975.
9. Работнов Ю. Н. *Механика деформируемого твердого тела*. М., 1988.

*S. S. SHERBAKOV*

### **STRESS-STRAIN STATE OF THE DISK–CYLINDER ACTIVE SYSTEM IN CONDITIONS OF CONTACT INTERACTION AND BENDING OF THE CYLINDER**

#### **Summary**

Fields of stresses and strains in a disk–cylinder active system is observed. Stress state was obtained by superposing the field of stresses conditioned by action of normal and tangential elliptically distributed contact forces and by non-contact bending of the cylinder. A significant change of the stress-strain state in comparison with the solution for the pure contact problem is shown.